昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2003年7月1日発行　第41巻7号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

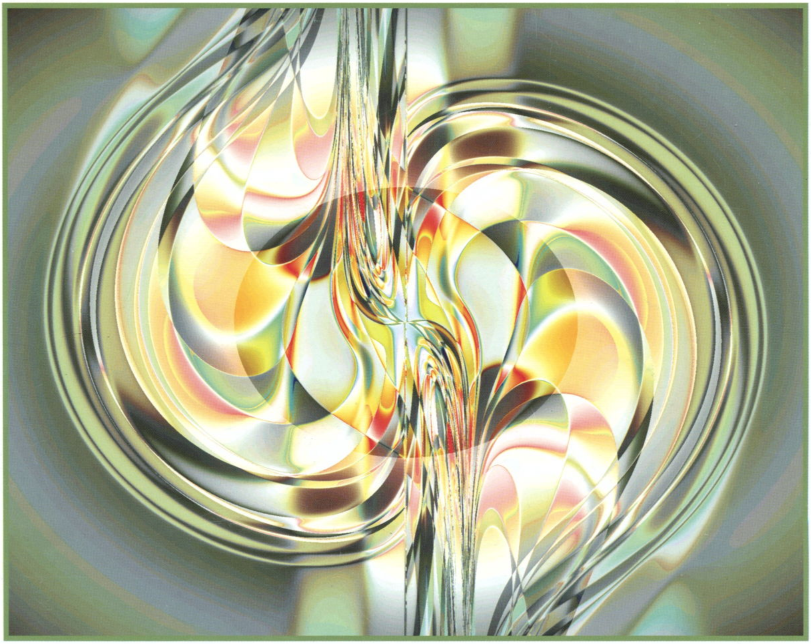
数理科学

7
2003

特集

$\hbar$の世界

プランク定数が拓いた量子パラダイム



No.481

サイエンス社

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-24：for Senior & Graduate Courses）

脳の謎に挑む

ブレイクスルーへの胎動

茂木健一郎　編著

本体 1829 円　　送料 310 円　　　表示価格は税抜きです

サイエンス社

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-23：for Senior & Graduate Courses）

微分幾何講義

一般理論と現代物理への応用

二木　昭人　著

本体 1857 円　　送料 310 円　　表示価格は税抜きです

第 1，2 章は微分幾何の一般論，第 3，4 章は近年の理論物理に関わるテーマを扱う．諸概念が正確に述べられているので，本書を理解すれば，微分幾何の理論物理への応用なども適切な形で可能になる．また，物理系の読者には，数学的な議論を知る上でも参考になる．数学系の学生の方々にとどまらず，幅広い読者が対象の微分幾何の現代的な入門講義となっている．

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 481 July 2003

$\hbar$ の世界

プランク定数が拓いた量子パラダイム

本号に掲載された広告主
数理システム／表4
朝倉書店／35

表紙：戸川 隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．郵送料小社負担にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間(本誌のみ) 11,000円，1年間(本誌十別冊2冊) 14,500円，半年間(本誌のみ) 5,500円，半年間(本誌十別冊1冊) 7,250円です．(税込み価格)

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～2000年/8 省略
2000年/9 暗号の数理
/10 脳と心の量子論
別冊 数論の歩み
/11 数理物理における代数解析的方法
/12 20世紀科学革命の基礎
2001年/1 時間とは何か
/2 微分幾何の新世紀
/3 物質とは何か
/4 場の量子論の新たな方向
別冊 量子力学の発展
/5 電磁気学と現代物理学
/6 量子情報と量子コンピュータ
/7 スピンはさらにめぐる
/8 ゲノムサイエンスの新地平
/9 点，粒子，場
/10 ヒッグスの謎
別冊 生命情報科学の拡がり
/11 空間概念と物理学
/12 数学による物理の表現
2002年/1 〈システム〉という見方
/2 ナノスケールの物理世界へ
/3 物理定数のプロフィール
/4 M理論とは何か
別冊 現代物理と現代幾何
/5 物理学とポテンシャル
/6 DNA：紐の物理
/7 波動関数のミステリー
/8 熱力学の多彩な展開
/9 真空：その真実と物理像に迫る
/10 エコノフィジックス最前線
別冊 脳情報数理科学の発展
/11 エキゾチックな量子の世界
/12 数理工学の地平
2003年/1 保存則とは何か
/2 素粒子的宇宙論の新展開
/3 量子力学とカオス
/4 〈波〉の魅力と数理
別冊 量子情報科学とその展開
/5 〈質量〉とは何か
/6 トポロジーの新世紀

数理科学臨時別冊一覧

02年/6 はじめての逆問題
02年/7 化学物理入門
02年/8 有限要素法による構造解析事例集
02年/9 基礎からの力学系
02年/11 独立成分分析
02年/12 時系列解析入門
03年/1 物理数学ノート
03年/2 数学の未解決問題
03年/3 量子論の基礎
03年/5 微分幾何講義
03年/6 脳の謎に挑む

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店(新宿)
紀伊國屋書店新宿南店
弘栄堂書店(吉祥寺)
くまざわ書店本店(八王子)
くまざわ書店桜ヶ丘店(多摩)
書泉グランデ(神田)
書泉ブックタワー(秋葉原)
三省堂本店(神田)
大盛堂(渋谷)
芳林堂(池袋)
リブロ池袋店(池袋)
ジュンク堂書店(池袋)
芳林堂(高田馬場)
八重洲ブックセンター(東京駅前)
旭屋池袋店
栄松堂ジョイナス店(横浜)
有隣堂イセザキ町店(横浜)
有隣堂西口・東口(横浜)
有隣堂厚木店(厚木)
文教堂ブックセンター(川崎)
旭屋船橋店
友朋堂(つくば)
三省堂名古屋店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店(大阪)
旭屋本店(大阪)
アバンティブックセンター(京都)
ジュンク堂書店(京都)
ジュンク堂書店(神戸)
ジュンク堂サンパル店(神戸)
ジュンク堂書店(姫路)
ジュンク堂書店(大分)
宮脇書店岡山本店
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂(仙台)
金港堂パーク店(仙台)
ジュンク堂書店(仙台)
鹿島ブックセンター(いわき)

——大学生協・売店——
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿・野田
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学・千葉大学
名古屋大学 北部厚生会館
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂

July 2003 MATHEMATICAL SCIENCES Number 481

特集／$\hbar$ の世界

$\hbar$ の世界

20 世紀物理とプランク定数

仲　滋文

1. 2000 年，300 年，100 年…

「球の大円を底面とし，その球の直径に等しい高さをもつ円柱は，量（体積）において球の 3/2 倍であり，その（両底面を含む）表面積は，球の 3/2 倍である」．これはアルキメデスが自身で最も高く評価した発見であり，シュラクサイ[*1]を攻め滅ぼしたローマの将軍マルケルスが戦渦による彼の死を悼んで建てた墓碑に，その幾何学図形とともに刻まれたと伝えられている．アルキメデス[1]が幾何学や浮力の発見を著したのは紀元前 250 年頃のことであり，そこには世界を数理を基礎とする論証で解き明かそうとした科学者の原型を見ることができる．

15 世紀に入り，実験による理論検証の観点がガリレオにより確立され，17 世紀に古典力学の基礎がニュートンにより完成されたが，その研究手法はすでにアルキメデスに見ることができる．しかしギリシャ科学の世紀からニュートン力学の世紀に至るには，古いアリストテレスの科学哲学を払拭し，正しい自然の姿を探るための実験・観測技術の向上が必須であり，ほぼ 2000 年の時間を必要とした．こうして人類は精妙な古典物理学の体系を手に入れたが，驚くべきことに，これから $\hbar$ の世界への扉を開くまでにさらに 300 年が必要であった．天体の運行に目を見張る基礎を与えたニュートンの力学も，$\hbar$ の世界へ導く何の力も発揮しなかったのである．

*1)　現シラクーサ，シチリア島の東海岸に位置する．

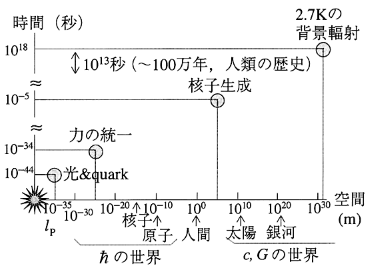


図 1　宇宙の 150 億年 ~ 人類の 100 万年．

20 世紀は $\hbar$ の世界が様々な分野において開花した 100 年であり，人類が定数 $\hbar \sim 1.05 \times 10^{-34}$ J·s[2,3] を頼りにミクロの素粒子の世界から自然定数 c, G の支配する[*2]宇宙の構造までを知り始めた時代である（図 1）．これは 100 万年とも言われる人類の歴史の最後の 100 年であり，この世紀に得た知識を基に，人類はおよそ 150 億年の宇宙の歴史をも俯瞰することができるようになった．$\hbar$ の世

*2)　c：光速，G：万有引力定数．

界は，直接的には高温の炉から放出される光のエネルギーと温度の関係を正しく導くプランクの輻射公式の力を借りて開かれたものである．しかしそのような世界の存在は，原子・分子の存在を仮定したボルツマンの統計物理学の成功や，J.J. トムソンによる電子の存在確認（1897）から予感されていたものでもあった．

2. $\hbar$ の扉を開く[4)]

トムソンにより電子が確認された年に，プランク（独）は当時未解決の問題であった（黒体）輻射法則の研究を開始した．1900 年 10 月，プランクは赤外と紫外のそれぞれの側で有効な関係式を内押する公式として，温度 T，振動数 ν の輻射のエネルギー密度の表式

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^3}{c^3}\frac{h}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

を導いた．ここで，k は温度 T をエネルギーに換算するボルツマン定数であり，$h\nu/kT$ は無次元の変数であるから，$h\nu$ はエネルギーの次元[*3)]をもつ変数である．さらに ν の次元が (時間)$^{-1}$ のため，この式に現れた h は“エネルギー × 時間”，すなわち“作用”の次元をもつ定数になる[*4)]．プランクは h の物理的な意味を深く考え，輻射の源である熱壁の振動子に

$$\epsilon = h\nu$$

を単位とする離散的なエネルギーを仮定し，$u(\nu, T)$ がエントロピーに対するボルツマンの表式 $S = k\log$(状態の確率) から導かれることを論証した．プランクの着想は，エントロピーの原子論とも言えるものであるが，次の本質的な飛躍は，当時ベルンのスイス特許事務所の技師であった若き日のアインシュタインによりなされた．1905 年，アインシュタインは h が輻射そのものに起因し，振動数 ν の光がエネルギー $h\nu$ の粒子（光量子）の性格をもち，光電効果等はこれを支持する現象であると主張した．光量子の概念は，光が波と粒子の二重の性格をもつという，$\hbar$ の世界の驚くべき姿を垣間見せた[*5)]．

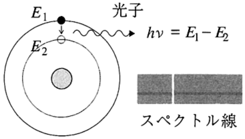


図 2　水素原子のスペクトル．

一方，電子の存在により，仮説ではなく物理学者の取り組むべき対象となった原子もまた，$\hbar$ の世界の扉であることが明らかになった．1913 年，ボーアはラザフォード（1911）が原子構造の実験解析から提唱した有核原子模型を基に，運動する電子が軌道を移るたびに軌道のエネルギー差に見合う振動数の光子を出し入れする原子模型を発表した．ボーアの模型では，$\hbar$ が本質的な役割を果たし，水素原子に固有の光のスペクトルの一部を見事に説明することができた（図 2）．

ボーアの原子模型は，ゾンマーフェルトらにより電子が楕円軌道を描く場合にも拡張され，原子スペクトルの微細構造が説明された．この過程で，電子の古典的運動と $\hbar$ を組み合わす“前期量子論”の手法が開発されたが，周期運動に限られた手探りの理論形式であった．1925 年の秋，カウシュミット＝ウーレンベックは，パウリが原子スペクトルの検討から推論した電子の二価性を表現するものとして，$\pm\frac{1}{2}\hbar$ の自転の角運動量（スピン）成分をもつ電子像を提唱した．角運動量は作用の次元をもつため，その値もまた $\hbar$ の支配下にあったことになる．ミクロの世界では，広く作用

*3)　この場合の次元は，物理量を測る単位のことである．

*4)　h が歴史的なプランク定数であるが，理論的には角振動数 $\omega = 2\pi\nu$ を用いることが多いため，$\hbar = h/2\pi$，$(h\nu = \hbar\omega)$ もプランク定数の意味で使われる．

*5)　1965 年に発見された宇宙の背景マイクロ波は，プランクの輻射公式に従い，初期宇宙の平衡状態にある光子（図 1）の名残として，ビッグバン宇宙の根拠の一つとなった．これによりまた，初期宇宙の量子状態が現在の宇宙に反映されることになり，素粒子論と宇宙論の繋がりが与えられることになった．

の次元の関わる物理現象に $\hbar$ が登場し，これと他の物理定数との組合せで，系を代表する長さの定数などが導かれる．例えば水素原子ではボーア半径 $a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \sim 10^{-11}$m が，重力が関わる場合[5)]にはプランク長 $l_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim 10^{-35}$m が有効になる．これらは，日常的なスケールに比べて極端に小さいため，古典力学完成後も 300 年の間，$\hbar$ の世界はその存在に気付かれなかったのである．

3. 量子力学の誕生

$\hbar$ の世界の基本法則は，電子のスピンが提唱された年の 7 月，23 才の少壮の物理学者ハイゼンベルク（独）により突き止められた．ハイゼンベルクは，原子を構成する電子が異なる状態 n から m に変化する過程で光を吸収あるいは放出することを深く考察し，観測に関わる量は遷移を表現する数値の総体であり，電子の位置変数 x もそのような数値を並べた行列

$$x \leftrightarrow \hat{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

に対応させるべきであると考えた[*6)]．ハイゼンベルクの着想はパウリやボルンの後押しを得て行列力学として完成されてゆくが，ディラック（英）は行列力学と古典力学のハミルトン形式の類似性に気付き，古典力学から量子力学への移行の本質は粒子の位置 x と運動量 p を交換関係

$$\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$$

を満たす演算子（ディラックは q–数と呼んだ）$\hat{x}, \hat{p}$ への置き換えにあることを見抜いた（1925, 9 月）．

*6) この年の 6 月，ハイゼンベルクは「枯草病（花粉によるアレルギー疾患）」を癒すためにデンマークのヘリゴランド島で休暇の時を過ごした．この間，行列を古典力学の力学変数に対応させる考え方からエネルギー保存則が導かれることを明らかにし，ついに $\hbar$ の世界の基本法則を掴んだことを確信した．このとき感動のあまり眠ることができず，海に突き出した岩によじ登り夜明けの日の出を待ったと，述懐している．

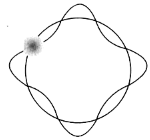


図 3　円軌道を描く電子と，ド・ブロイ（定常）波．

行列力学は，パウリの強腕により水素原子のスペクトルを導くことが示されたが，手法の難解さもあってすぐは受け入れられなかった．

行列力学が現れた翌年の 1926 年 1 月に，波動力学と呼ばれる $\hbar$ の世界のもう一つの切り口が，オーストリアのシュレディンガーにより開かれた．この理論は，ド・ブロイ（1926, 仏）の提案による運動量 p の粒子に波長 $\lambda = \frac{h}{p}$ の波が付随するという大胆な考え方を発展させたもので（図 3），行列代数ではなく現在 “シュレディンガー方程式” と呼ばれる微分方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(t, x) = \hat{H}\psi(t, x)$$

を基礎とした．ここで $\hat{H}$ は，粒子のエネルギーを正準変数 (x, p) で表したハミルトニアンで $p \to \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ の置き換えを行って得られる演算子である．波動力学は行列力学と全く異なる理論形式であるにもかかわらず，水素原子のスペクトルを正しく与え，しかも物理学者にとって手馴れた微分方程式であることから，シュレディンガー方程式は広く受け入れられることになった．また，2 つの手法が数学的に同等であることも，時を移さずシュレディンガー自身や，ディラック，ヨルダンらにより証明された．

さて，シュレディンガー方程式から引き出すことのできる観測量は，波動関数 ψ から固有値として導かれる古典的物理量であり，ψ そのものではない．ψ の物理的意味は，波動方程式を扱った当初からの問題であり，シュレディンガー自身は電子の空間的広がりに対応する実在の波と考えたが，この解釈は様々な困難を含んでいた[*7)]．現在

*7) 一例をあげれば，空間的に局在する自由粒子の波束は瞬時に広がってしまい，有限のサイズに止まらない．

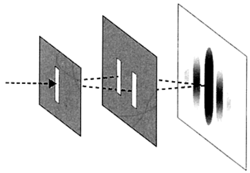


図 4　ダブルスリットを通過した粒子の干渉.

では，ψ はボルン（1926）による物理的事象の確率に結び付いた関数としての解釈が受け入れられている．この考え方によると，シュレディンガー方程式に純虚数 $i=\sqrt{-1}$ が含まれていて ψ が複素関数となることから，

$$|\psi(t,x)|^2\Delta x$$

が，粒子を区間 $(x, x+\Delta x)$ に見出す確率ということになる．特に，シュレディンガー方程式が線形であるため，ψ の空間は“重ね合わせが”可能なベクトル空間となる．したがって，波動関数 ψ_1, ψ_2 の和 $\psi_1+\psi_2$ も波動関数で，これによる確率密度は

$$|\psi_1+\psi_2|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2\mathrm{Re}(\psi_1\psi_2^*)$$

と計算される．右辺の第 3 項が，量子力学に特徴的な干渉項である．

この干渉効果は現実のものであり，図 4 のダブルスリットを通過した電子はスクリーンに着弾して点として観測されるが，これらの点の数を積算すると干渉パターンが生じるのである．この意味で，電子はダブルスリットを波の如く通過して自分自身と干渉する．ただし，電子が何れのスリットを通過したかを確認する操作を行うと，干渉パターンは消える．1927 年，ハイゼンベルクは思考実験を用いて，粒子の位置を Δx の誤差で確認しようとすると運動量に

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar$$

を満たす誤差 Δp が生じることを論証した．これによると，位置を決める操作で運動量の不確定性が大きくなると $\lambda=\frac{h}{p}$ を通して波長の定まったド・ブロイ波としての意味が曖昧になり，粒子的特徴が観測されるのである．ボーアはこれを解釈する上で，“相補性”という観点を付け加えた．ボーアによれば，いずれかのスリットを通過したことを確認しようとする粒子性の実験と，ダブルスリットを通過した前提で行う波動性の実験は本来同時に行えない性質のものであり，したがってそれぞれの実験で電子が粒子と波の性質を示したとしても矛盾はない*8) というものである．このような解釈は，哲学の認識論をも揺さぶる内容を含んでいて，アインシュタインのような時代を代表する科学者からの反論もあったが，その論争を通して量子力学の正しさは一層明らかにされていった．

さて，完成された量子力学は，不確定性を含む $\hbar$ の世界の非日常的な特徴を様々な角度から体系的に解き明かした．同種粒子系における統計性の問題も，物質の性質に直接に反映するこのような特徴の一つである．1924～1925 年，アインシュタインは光子の統計性を論じたボーズの論文に重要性を認めてドイツ語に訳して紹介し，さらに自身の考えを発展させた．いま，2 つの状態（$(*,*)$ の左右で区別）をとることのできる同種粒子 A, B を考えると，古典的には

$$(\mathrm{AB},\ \ )\ \ (\mathrm{A},\mathrm{B})\ \ (\mathrm{B},\mathrm{A})\ \ (\ \ ,\mathrm{AB})$$

の 4 配位が考えられる．しかし A, B が区別できなければ，(A, B), (B, A) を 1 つに数えて 3 配位と考えなくてはならない．光子はこのような統計性に従い，プランクの輻射公式はこれが反映された結果であった．一方，原子スペクトルの解析から，電子はパウリの排他律に従い同じ状態に 2 つ以上の粒子が存在できない．このような同種粒子では，(AB,　), (　, AB) の状態は許されず，上の配位は 1 つと数えなくてはならない．この場合の，一般的な統計法則はフェルミ=ディラック（1926）らにより調べられ，物性分野に応用された．1928～1930 年，ブロッホは固体のように近接した原子の

*8)　エディントン（英）は，“波”と“粒子”の二重性を備えた対象を“wavicle”と表現した.

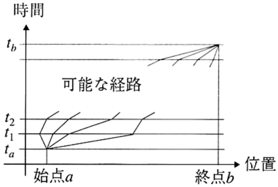


図5　波動関数を与える経路の和.

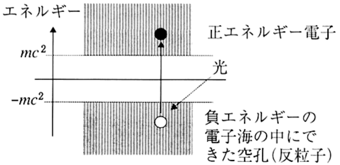


図6　ディラック：真空から光で叩き出された電子と，空孔として生じた陽電子.

系において，電子のエネルギー準位に離散的なバンド構造が現れることを研究し，導体，半導体，絶縁体等の性質をバンド構造と電子のフェルミ統計から理解する路を開いた．また，磁性体に対しワイス（1906）が提唱した[8]，外部磁場に他の分子磁場からの寄与を加える“分子場近似”の現象理論にも，ハイゼンベルク（1928）がスピン間相互作用による量子論からの基礎づけを与えた.

量子力学の理論形式は，ハイゼンベルク=シュレディンガー以降，ファインマンによりもう一度大きく発展させられた．1948年，ファインマンはディラックの着想を基に，時刻 t_a から時刻 t_b に至る波動関数 ψ_{ba} が，古典的な作用 S を

$$\psi_{ba} \sim \sum_a^b \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}S}$$

の形で a から b に至る経路で足し上げて得られることを導いた（図5）．この足し上げげには，S の停留値を与える古典軌道が大きく寄与し，それからのずれが $\Delta S > \hbar$ の程度になると指数部の振動により寄与は相殺して小さくなる．古典的描像の活きた経路積分の形式は，量子効果の実用的な計算手法にも飛躍的な発展をもたらした.

4. 反粒子の世界

よく知られているように，アインシュタインは $\hbar$ の世界の鍵である光量子の理論と前後して c の世界の基本法則となる特殊相対性理論を創り上げ，揺るぎない評価を得ていた．一方，量子力学は非相対論的な形式に作られているため*9) 両者の統合は次の自然な課題であった．この中には，後にスカラー場の波動方程式として意味をもつことになるクライン=ゴルドンの試みもあったが，ディラック（1928）は自由電子に対しシュレディンガー方程式と同様な時間に関する1階の方程式

$$\left(\gamma^0 i \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\gamma}\cdot i\boldsymbol{\nabla} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$

を研究し，$\hbar$ の世界の新しい局面を展開した．この方程式が相対論的粒子のエネルギーと運動量の関係と整合するためには，$\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}$ は 4×4 行列でなくてはならず，ψ 自身は4成分の波動関数となる．このとき，方程式はスピン $\frac{1}{2}$ で正・負エネルギーの解を導くが，正電荷の負エネルギー粒子の解は物理学者を困惑させた*10)．これに対しディラックが最終的に与えた解釈は，真空は負エネルギー電子で占められた状態で，正電荷粒子は真空の空孔に対応する未知の粒子（電子の反粒子）というものであった（図6）.

このような粒子の存在は，1932年アンダーソンが宇宙線の実験で陽電子を発見することにより確かめられた．現在の言葉で言えば，ディラック方程式はC（荷電共役）変換の下で不変な構造をもち，粒子と反粒子が対等に登場した訳である．空孔理論から20年後，反粒子は時間を逆行する粒子

*9)　シュレディンガーは，最初は相対性理論を考慮に入れた波動方程式を調べたが，スピンの自由度が含まれていなかったため実験と合わず，最終的に非相対論的な理論として発表された.

*10)　当時は正電荷粒子として陽子が知られていたが，質量が異なり，電子と組にして一つの方程式にまとめることはできなかった.

という解釈がファインマンにより提唱され，$\hbar$ の世界は反物質の世界に様々な角度から光をあてることになった．

5. 量子力学から場の理論へ[6)]

量子力学を創る手がかりとなった輻射と原子は，無限自由度（場）と有限自由度の系という，力学的に異質の対象に見えた．輻射は電磁波が $\hbar$ の世界で見せる姿であり，エネルギー $\epsilon_n = nh\nu$ に現れる量子数 n は，光子の個数 n である．一方，（球対称）水素原子のエネルギー $\epsilon_n \propto \frac{1}{\hbar^2 n^2}$ に現れる量子数 n は，1 原子の量子状態を区別する数であった．

1927 年，ディラックは原子による光の吸収・放出を体系的に記述する目的で電磁場の量子論に着手し，ボーズ統計に従う光子と電磁波との関係を明かす Q.E.D（量子電気力学）の原型を論じた．ディラックは，その手法を通常の量子化以上の内容を含む“第 2 量子化”と考えた．一方，ヨルダンは古典場の量子化が本質的であり，物質場はすべて同様の量子化が適用できると考えて，フェルミ統計に従う粒子場の量子化法を提案した．このような古典場の量子化は，ハイゼンベルク=パウリ（1929）により通常の正準量子化に沿った一応の体系化がなされ，例えばシュレディンガー波動場は交換関係*11)

$$[\psi(t,\boldsymbol{r}), \psi^*(t,\boldsymbol{r}')] = \delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

を満たす波動関数とされた．このとき，物質場がない状態としての真空 Φ_0 に上の量子場を作用させた $\psi_1^\dagger \cdots \psi_N^\dagger \Phi_0$ は，N 粒子シュレディンガー波動関数の意味をもち，この意味で量子場は波の要素と粒子の要素を数式的に表現したものとなった．こうして，例えば Q.E.D は相互作用を通して互いに生成消滅する電子と光子の系を記述し，個々の反応が生じる確率や相互作用による束縛状態の問題などに幅広く適用できることになった．

*11) $\hbar$ が現れないように見えるが，ψ に正準共役な運動量が $i\hbar\dot{\psi}^*$ となり，交換関係の $\hbar$ と一緒に取り除けたのである．

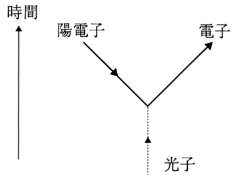


図 7　ファインマン：光子による電子–陽電子対の生成．

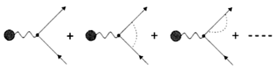


図 8　外場（波線）による電子の散乱図：実線と破線はそれぞれ電子と光子の伝播を表す．波線が磁場なら，第 2 項以下は磁気能率への（発散）補正項となる．

実際には，これは場の量子論の始まりと言うべきものであり，量子場の理論は現在に至る過程で長足の発展を遂げている．特に，自己相互作用等を通して生じる“発散”を封じ込めるために朝永，シュヴィンガー，ファインマン（～1948）により完成された“くりこみ”の手法は，電子磁気能率のずれを 9 桁もの精度で与え，現在ではこの手法の適用可否が理論の質を測る重要な基準ともなっている．また，その発展過程でファインマンにより開発された，相互作用を図 7 や図 8 のようなダイアグラムに対応させて計算する手法は，直感と効果的な計算技術が結び付いた優れた手法として広く利用されている．

場の量子論は粒子数が変化する多粒子系の量子力学であり，19 世紀末に完成されていた統計力学にも自然に応用されて，物性論の発展にも大きく貢献した．こうして，場の理論は素粒子のみならず物性の分野でも独自に発展し，相互に技術的な進展を促して，$\hbar$ の世界を攻略する必須の技術となった．

6. 位相の世界

$\hbar$ の世界を記述する波動関数 $\psi = e^{i\theta}R$ は本質的に複素数で，観測量に結び付く確率密度は $|\psi|^2 = R^2$ で表された．定義により，位相因子を $\theta \to \theta + \chi$ とずらしても，確率密度は変化しない．しかしシュレディンガー方程式の形は微分項を通して変わる．これを不変にするには，あらかじめ

$$\nabla\psi \to \left(\nabla + i\frac{e}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)\psi$$

のように書き換えて，位相変換と同時に

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} - \frac{\hbar c}{e}\nabla\chi$$

とずらす必要がある．$\boldsymbol{A}$ の変換は電磁場のゲージ変換の一部で，$\boldsymbol{A}$ をベクトルポテンシャルと考えれば $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ は磁束密度となる．電磁場と荷電粒子の相互作用は，このような位相変換の不変性を原理として導入されるが，そこで波動方程式に登場する場は磁場ではなくポテンシャルである．そこでアハラノフ=ボーム（1959）は，$\hbar$ の世界では電子は磁場がなくともポテンシャルとの相互作用ができることを指摘し，外村（1983）によりその実験的確認がなされた．波動関数の位相変換と結び付いたゲージ場の視点は重要であり，現代の素粒子の力の理論を構築する標準的な考え方となっている．

さて，$\psi(\boldsymbol{x}) = 0$ で定義される波動関数の零点は，3 変数 $\boldsymbol{x}$ に対する 2 条件 $\mathrm{Re}\psi(\boldsymbol{x}) = \mathrm{Im}\psi(\boldsymbol{x}) = 0$ になり，零点の集合は 1 次元の曲線となる．ディラック（1931）は，幅が 0 で半無限に伸びたソレノイドが波動関数の零点曲線と重なる解があることを示し，ソレノイドの開放端から出る磁場が磁気単極子の磁場と見なせることを主張した（図 9）．このとき，開放端を包む閉曲面の積分で定義される磁荷 $g = \oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$ は，波動関数の一価性から

$$\frac{eg}{\hbar c} = 2\pi n, \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

と量子化される．ディラックの磁気単極子は実験的に確認されていないが，この他にも $\hbar$ の世界では様々な問題でトポロジーに関連する量子数の現れることが，知られるようになった[11]．

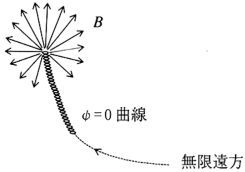


図 9　ディラックの磁気単極子．

波動関数の位相は，“マクロな量子効果”[9] を見せることもある．温度 T で熱平衡にある粒子系では，粒子に $\frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2}kT$ の運動エネルギーが分配されるが，これをド・ブロイ波長に換算すると

$$\lambda_T \sim \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3mkT}}$$

となる．この大きさは，室温で原子サイズの 100 倍程度であり，粒子間距離がこれに近づくと統計力学に量子効果を取り入れることが本質的になる．しかし低温極限では λ_T が広がり，マクロスケールで量子効果の現れることが期待される．この典型的な例が，ボーズ粒子であるヘリウム ^{4}He の引き起こす “超流動” である．低温になるにつれヘリウム原子のド・ブロイ波が広がって互いに影響を及ぼし，次第に一つの状態に凝縮してゆく．低温極限で粒子は基底状態に移行するが，ボーズ統計は全粒子が一つの状態に凝集することを許し，結果として 2.17 K で粒子間摩擦のない超流動状態が出現するのである．極低温で電気抵抗が 0 になる超伝導も，結晶格子との相互作用でボーズ粒子である電子対が形成され，ボーズ凝縮したものと考えることができる．1995 年，レーザー冷却法の技術を用いて，ボーズ原子 ^{87}Rb, ^{23}Na などのボーズ凝縮が確認された．冷却により，原子波の位相が（光のレーザーのように）コヒーレントに揃えられた結果である．

7. $\hbar$ が運ぶ天からの手紙

1987 年 2 月 23 日，数十万年前に大マゼラン星雲の超新星爆発から旅立ったニュートリノが，旧神岡鉱山に建設された純水槽から光子を叩き出し，光電増倍管にキャッチされた．ニュートリノ天文学の夜明けである．ニュートリノは原子核の崩壊において漏れ出す弱い相互作用の粒子としてパウリ（1930）により予言され，1950 年代に実験的に確立された．現在の素粒子の標準模型の中では，電子，ミュー粒子，タウ粒子などの軽粒子と対を成して組み込まれる基本粒子である[12]．

一方，1960 年代後半から太陽の中で生成されたニュートリノを検出する試みも始められていたが，観測されたニュートリノ流の強さは，太陽の標準理論が予測する理論値の半分以下であった．このくい違いを説明する試みの一つに，“振動” の考え方がある．いま，電子とミュー粒子のニュートリノ ν_e, ν_μ の波動関数が，質量の異なる粒子 ν_1, ν_2 の波動関数の重ね合わせで

$$|\nu_e\rangle = \cos\theta|\nu_1\rangle + \sin\theta|\nu_2\rangle,$$
$$|\nu_\mu\rangle = -\sin\theta|\nu_1\rangle + \cos\theta|\nu_2\rangle$$

と表されると考える．すると，ν_e が生成されて地上に到達するまでに，質量の異なる粒子の位相速度が異なることから $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle$ に位相差が生じ，終状態 $|\nu_e'\rangle$ は $|\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle$ の重ね合わせ状態となる．この結果，ν_e が ν_e に止まる確率 $P(\nu_e \to \nu_e) = |\langle\nu_e|\nu_e'\rangle|^2$ は図 10 のように振動する．現実には，確率は混合角 θ だけでは必要な確率の現象を導くほど小さくはならず，太陽内部での物質の効果も含めて考える必要があるが，“振動” の仕組みは $\hbar$ の世界の基本原理の上に立った，自分自身との干渉に他ならない．

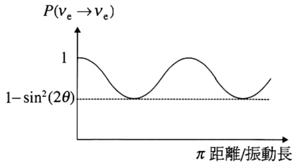


図 10　“振動長” は (質量)^2 の差で決まる．

かつて，雪の研究で知られた中谷宇吉郎は，「雪は天から送られた手紙である」と記している．これに倣えば，光子，ニュートリノを始めとする素粒子の現象や，低エネルギーでの様々な物性現象は，$\hbar$ の世界の量子の仕組みを巧みに使って，最小の世界から最大の宇宙までの情報を伝える自然の手紙とも言える．20 世紀は，人類が $\hbar$ の自然定数を頼りに森羅万象を語り始め，空想を現実にする様々な手段を手に入れた 100 年であった．$\hbar$ の世界は，アルキメデスの墓碑に刻まれた幾何学図形のように，20 世紀の叡智の記念碑に刻まれた，人類と自然の誇るべき合作である．

参考文献

1) 田村松平編：『アルキメデスの科学』（世界の名著＝ギリシャの科学，中央公論社）「球と円柱について」．
2) 本特集号：高田誠二：「プランク定数と現代の計測標準」参照．
3) 本特集号：西條敏美：「プランク定数の最確値研究の歴史的一断面」参照．
4) 高林武彦：『量子力学の発展史』（中央公論社，1974）．
5) 本特集号：池内　了：「宇宙論とプランク定数」参照．
6) 本特集号：亀淵　迪：「場の理論と $\hbar$」参照．
7) ディラック：『反物質はいかに発見されたか』（パリティブックス，藤井昭彦訳）．
8) 本特集号：植松英穂：「solid state physics の起源と作用量子」参照．
9) 本特集号：鈴木増雄：「マクロな現象とプランク定数」参照．
10) ディラック：『現代物理学講義』（培風館，有馬朗人，松瀬丈浩訳）．
11) 本特集号：倉辻比呂志：「プランク定数とトポロジー」参照．
12) 小柴昌俊：『ニュートリノ天体物理学入門』（ブルーバックス B–1394，講談社）．

（なか・しげふみ，日本大学理工学部）

プランク定数と現代の計測標準

高田　誠二

1. 焼きたてのパンを食卓に

プランク（1858～1947年）が，熱放射分光分布法則研究の帰結として，量子仮説を提唱し定数 h を導入したのは1900年の冬であった[1]が，それより4年前，彼の後輩ウイーン（1864～1928年）も同じく熱放射分光法則の定式化に志し，実験および理論の両面から研究を進め，その結果，「ほとんど粒子論的」と言ってよいほどの法則（いわゆるウイーンの放射公式）を見出した（1896年）．原論文で，放射の強さは

$$\frac{C_1}{\lambda^5}\mathrm{e}^{-\frac{C_2}{\lambda\theta}} \tag{1}$$

と表わされていた（λ：波長，θ：温度，C_1, C_2：定数）．

当時，ウイーンが利用し得た実験データは近赤外領域のものに限られていたのであるが，もしも彼が，この段階で遠赤外領域の実験データをも利用し得たと仮定すれば，ウイーンは格別の苦労はせずに「波動論（古典電磁気学）的な」法則（いわゆるレイリーの放射公式，試論は1900年の6月，決定版は1905年）

$$\frac{2ckT}{\lambda^4} \tag{2}$$

（c：真空中の光速，k：ボルツマン定数）を導くことができたかと思われる．

そこで，この（歴史的事実に反する）仮定を更に拡張すれば，ウイーンは，近赤外領域の粒子論的公式と遠赤外領域の波動論的公式とを総合して，二元論的（つまり私たちの知る量子論的な）公式

$$\frac{2c^2h}{\lambda^5}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{ch}{k\lambda\theta}}-1} \tag{3}$$

（h：プランク定数）を見付け，プランクの功績を先取りしたかもしれないのだ！

歴史の真実に戻ろう．ウイーンは，上述の「熱放射の法則に関する発見」に関して1911年のノーベル賞を受けたが，彼の研究意欲は休むことなく拡大し続け，熱放射研究を離れてからはX線，陰極線なども手掛けた．注目すべきは彼の陰極線（電子ビーム）の実験的研究の推移であって，彼は初期にはその波動性を検証し，晩年にはその粒子性の確認を試みた．つまりウイーンは，電子の波動—粒子の二重性という量子論的命題を，一生の間の2つの時期に，別の実験で調べたのである．この推移を，プランクの量子論理解の著しい保守性と比較すると，後輩ウイーンの力量が改めて光輝を増すように見える．

更にウイーンは，第1次大戦期，通信用真空管の生産に協力した．真空技術は，ウイーンの物理実験室では既に手なずけられていたが，それを，民生・軍需のための真空管製造に応用する段階では，ウイーンのように経験ゆたかな研究者の参画が不可欠だったのだ．

さて，そのウイーンが，大戦期にバルト諸国を巡回し各地で講演[2]をした．その一篇「物理学と技術」（1918年5月6日）の中に，次の文が見られる——

実験室のかまどから出されたばかりの，まだ冷めていない物理のパンが，たびたび食卓に供せられるようになった．

ホカホカの「物理のパン」とは，ウイーンが講演で挙げた例に沿って言えば無線通信，電気照明，レントゲン線の応用などだが，個別には電波検出器，電気信号増幅回路，白熱電球，アーク灯その他もあって，いずれも当時，物理研究室の「かまど」から取り出されたばかりの「焼きたてのパン」の譬えにふさわしいもの，そして民生・産業の諸局面の食欲をそそるものだったに相違ない．ウイーンのこの説話は，「物理と技術」との関係（特に1890年代以後のそれ）を巧みな譬えによって語った名コピーと言うべきであろう．

ところで，ウイーン自身は挙例しなかったにせよ，「計測」もまた「焼きたてのパン」のサンプルとして立派に通用し得たのではあるまいか．彼自身，高温物理実験での温度測定のための白金—白金ロジウム10%熱電対（今日いうS熱電対）について使用経験を積み，気体温度計で得られる熱力学温度との比較による校正を1450℃まで実行し(1892年)，更に，実用的なパンフレットに一文を書いたりもした（1895年）[1)]．

この熱電対は，フランスのル・シャトリエが1886年に考案し発表したものであるから，ウイーンが手にしたときにはもはや焼きたてのパンとは呼べなかったかもしれないが，ウイーンは，このパンに熱力学温度という美味なバターをたっぷり塗って，熱放射実験という立派な食卓に供したのだ（このバターについては後述する）．

ところでこの熱放射実験だが，そこで使われた装置は，高温 T ケルビン（ウイーンらの実験では1450℃すなわち約1820 Kまで）の空洞の中に放射を閉じ込めて熱平衡状態に保ち，平衡を著しく乱すことがない程度に小さな穴を空洞の壁に設けて，そこから外へ出る放射の性質（波長 λ の関数としての放射の強さ I）を，別置の放射検出器で観測するという構成になっており，しかも空洞の温度は，熱力学的に確実な方法で，測定できるのであるから，装置自体が科学的価値の高い「かまど」の働きをしていたのである．

果たせるかな，このかまどは，味わい深いパンを焼き上げてくれた．本稿の冒頭で言及した「ウイーンの放射公式 (1)」である．理論面では，量子的二重性の「粒子論的側面だけ」を表わす公式であったけれども，実験面では，当時の（可視および近赤外の波長領域，比較的に低い温度領域に対応する）観測値を充分によく表現することができた．

では，このパンをどこのテーブルに配ってどのように食べればよいか？ 学術の世界には，そうした目利き能力をもつ人がいるものだ．この場合，「波長 μ を限定した上で放射の強さ I を測定することによって温度 T を求める」という食べ方が，さっそく珍重されることになったのである（いわゆる光学的な温度計であって，経験的なものは1860年代から試作されていたが，精密な線条消失型光高温計は1901年に発表された）．

2. グローバルな温度計測標準を熱放射公式で

時代は飛ぶが，1920年代，メートル条約という国際的な約束事の一環として，温度標準の設定が熱心に議論されるようになった．リードしたのは，かつてウイーンも在籍したドイツ国立物理工学研究所(Physikalisch–Technische Reichsanstalt，現在の名称はP.T. Bundesanstalt, PTB）のほか，米国の国立標準局（National Bureau of Standards，現在はNational Institute of Standards and Technology, NIST)，英国の国立物理研究所（National Physical Laboratory, NPL)，オランダ・ライデン大学カーマリン・オンネス低温研究所（KOL）である．論点は，(i) 熱力学温度を測定する方法の精密化と適用範囲の拡大，(ii) 温度定点（純物質の凝固点や三重点）の熱力学温度の正確な測定，(iii) 熱力学温度を充分よく近似する実用的な温度測定方法の確立の3件だった．これらについては，少々説明を加える必要があろう（一括した説明は教科書には見られないようなので）．

2.1 熱力学温度
——カルノーの発想から現代の記法へ

まず，前述ウイーンの実験の話にも出てきた熱力学温度．それは，熱力学の基本命題の一つである「熱機関サイクルに関するカルノーの原理」

> 可逆サイクルの効率は，作業物質の種類によらず，両熱源の温度だけで定まる

に基づいて定義され，現代の記法では，以下のように書かれる．

> 熱源Mと熱源Nとの間で作動する可逆サイクルにおいて，作業物質がNに与える熱量を Q_{N}，作業物質がMから得る熱量を Q_{M} とするとき，比
>
> $$\kappa_{\mathrm{M,N}} = \frac{Q_{\mathrm{M}}}{Q_{\mathrm{N}}} \tag{4}$$
>
> と，このサイクルの効率 $\eta_{\mathrm{M,N}}$ とは，一意的な関係
>
> $$\kappa_{\mathrm{M,N}} = \frac{1}{1-\eta_{\mathrm{M,N}}}$$
>
> を満たすので，$\kappa_{\mathrm{M,N}}$ もまた作業物質の種類によらず，両熱源の温度 T_{M} および T_{N} だけで定まる．そこで，T_{M} および T_{N} の値を
>
> $$\kappa_{\mathrm{M,N}} = \frac{T_{\mathrm{M}}}{T_{\mathrm{N}}} \tag{5}$$
>
> の関係に基づいて選び，そのような値を「熱力学温度」と呼ぶ．

2.2 基本温度定点とその熱力学温度値
——旧制と新制

ただし，数値の与え方には任意性があり，実際，歴史的にも変遷があった．

その1——旧制：トムソン（ケルビン卿）は，熱力学温度の最初の導入（1848年）に際し，セルシウスの伝統を尊重し，水の凝固点（氷点）と1気圧下での水の沸騰点（水蒸気点）とを基準に選び，かつ，両者の温度差に100の数値を与えた．

以下，この規約による熱力学温度を T' とし，また，これら2定点の温度の熱源を添字iceと添字steamとで表わすことにすれば，定義により

$$\kappa_{\mathrm{steam,ice}} = \frac{T'_{\mathrm{steam}}}{T'_{\mathrm{ice}}}$$

であり，また，規約として

$$T'_{\mathrm{steam}} - T'_{\mathrm{ice}} \equiv 100$$

であるから，任意の温度の熱源（添字x）と一方の定点，たとえば氷点の温度の熱源との間で作動する可逆サイクルでは

$$\kappa_{\mathrm{x,ice}} = \frac{T'_{\mathrm{x}}}{T'_{\mathrm{ice}}}$$

が成立するので

$$T'_{\mathrm{x}} = T'_{\mathrm{ice}} \cdot \kappa_{\mathrm{x,ice}}$$

と書ける．一方，(4) 式, (5) 式から

$$T'_{\mathrm{ice}} = \frac{100}{\kappa_{\mathrm{steam,ice}} - 1}$$

であるから，任意の温度は下式で表わすことができる．

$$T'_{\mathrm{x}} = \left[\frac{100}{\kappa_{\mathrm{steam,ice}} - 1}\right] \cdot \kappa_{\mathrm{x,ice}}$$

その2——新制：ケルビン卿が熱力学温度を導入してからちょうど100年目の1948年に，メートル条約関係の最高決定機関である国際度量衡総会が，大戦後の最初の会合を開いた（日本は，連絡受理にも難渋し，閉会後，断片的に情報を入手する有様であった）．

熱力学温度に関しては，この総会で，根本的な変更2件が提案され承認された；

> 基準の定点として，氷点よりよい精密さをもつ「水の三重点」を採用し，その温度は，氷点より0.01度だけ高いものとする．
> 熱力学温度は，水の三重点ただ一つを基準点として構成されるものとする．

ただし，「水の三重点の熱力学温度は後に取り決める」こととしたのであったが，続いてのその次の総会（1954年）は，次の決議を提案し採択した；

> 水の三重点の熱力学温度は正確に［定義として］273.16度であるとする．

以上を総合した決定は，1967〜68年の国際協約として，次のように表現されている；

> 熱力学温度の単位「ケルビン」は，水の三重点の熱力学温度の273.16分の1である．[現行の国際単位系（SI）文書の「基本単位」の第5項]

ここで，前と同じ記号のほか，水の三重点の温度にある熱源を添字trで表わし，新しい規約による熱力学温度を T とすれば，任意の温度の熱源と水の三重点の温度の熱源との間で作動する可逆サイクルでは

$$\kappa_{\mathrm{x,tr}} = \frac{T_{\mathrm{x}}}{T_{\mathrm{tr}}}$$

であるが，規約として

$$T_{\mathrm{tr}} \equiv 273.16$$

であるから，任意の温度は下式で表わすことができる．

$$T_{\mathrm{x}} = 273.16 \cdot \kappa_{\mathrm{x,tr}}$$

2.3 熱力学温度の現実的な測定方法

以上のような考えのもとに，物質の個別性に左右されない熱力学温度が定義されるに至ったわけだが，当然，そこには疑問が伴う——可逆サイクルが実現できるのか，その効率を求めるにはどうすればよいのか等々．これらへの答が事実上noであることは，熱力学第二法則を学んだ私たちには自明だが，1850年代，トムソン，ジュール，クラウジウスらは，これらの疑問とほぼ同類の課題に正面から立ち向かい，細かい測定や深い考察の末に第二法則を定式化し，それを基盤として熱力学温度を定義してくれたのであった．

では，熱力学温度のこの定義は，実現不可能と認められているにもかかわらず，何故，尊重されるのか？ それは，カルノーの原理が“物質の種類によらずに”あらゆる物理的過程に適用できるからだ．ファーレンハイトの温度基準はアルコールの物性に依存し，セルシウスの温度基準は水銀の物性に依存していた．レオーミュールは，自分が提案した温度基準に一般性を付与するべくアルコールの組成を規格化しなければならなかった．それらと比べ，カルノーの原理に基づく温度基準は卓抜な普遍性を備えている．

さて，こうした歴史を経て，カルノーの原理に基づく熱力学温度の普遍性とそして実現不可能性が学界共通の認識として成立し，現実には，熱現象に関する諸法則のうち，カルノーの原理による熱力学温度を簡単かつ充分よい近似で含む形のものが捜し求められた．例えば気体の状態法則は，通常，圧力 p または体積 V のビリアル展開の形を経なければ熱力学温度 T と結び付かないが，充分に希薄にされれば，簡単な $pV = RT$（R は定数）で充分よい近似として表現できる．そこで，R を別途に求めた上で，希薄気体を V 一定の状態に保ち p を測れば T が得られ，また，p 一定の状態に保ち V を測れば T が得られる——こうして熱力学温度の測定の可能性が知られ，広く実用に供せられることとなった．

ところが，早速，限界が立ち現れる——気体が存在しない状態，たとえば極低温では T の測定は許されないのか．また，気体を閉じ込める容器が存在し得ない状態，たとえば常圧で個体が存在できないほどの高温では，T の測定は許されないのか．

しからば，ということで，他の熱学法則の資格が審査される——有望視されたのは，気体中の音速，常磁性，熱雑音などの法則であって，それぞれ評価もされ，限界付けられもした．そして，空洞熱放射の法則——こうして，話はようやくウイーン，プランクの時代につながることになる．当時の学者は熱力学的な思考実験に習熟しており，特にウイーンは，空洞内の放射でピストンを押すことなどを詳しく論じた．そうした考察で例えば「等温の壁で囲まれた空洞」を想定する際の，空洞の「温度」は，どの基準による値であってもよいが，彼の空洞放射実験の空洞の「温度」は，一般性のある基準に従って表現されない限り，データとして通用しない．そこで彼は，実験用空洞には熱電対（これも前述）という実用性の高い温度検出素子を取

り付け，その熱電対を気体温度計で校正してデータを整理し発表した．誠に行き届いた処置であり，しかもそれを 1450℃ といった高温まで実行した．実験物理学の歴史の上でも目立つ仕事と呼んでよい（温度計測の総合文献 3) にも，「気体温度計による金の凝固点の測定例」の古いほうから 2 番目に挙げられている．論文「高温の測定について」とその続報は，国立研究所 PTR からの報告として雑誌 *Zs. f. Instrumentenkunde* (1892), *Ann. der Physik* (1892) と (1895) に掲載された)．

ウイーンのこの仕事は，優れた実験家ホルボルンのリードのもとでなされたが，熱電温度計——気体温度計——熱力学温度という繋がり（20 世紀後半の用語で言えば，計測標準のトレーサビリティ）が模範的な形で達成されている点は，19 世紀末ドイツの，特に国立物理研究所の見識と実力の高さを後世に伝えていると言える．

この測定結果は，2 つの命題への強い支持となった——空洞放射の法則を「熱力学温度の関数」として表わせるという命題，および，空洞放射の観測を基にして「熱力学温度の測定」を行なえるという命題．後者は，上に列挙した気体温度計その他と並んで空洞放射利用温度計もまた「熱力学温度の測定の手段」にランク付けされたことを意味する．

2.4 国際温度目盛（または国際実用温度目盛）

この種の経験や知識が 20 世紀の最初の 1/4 の期間に徐々に集積されて，既に触れたようなメートル条約傘下での温度計測標準の設定のための努力が開始された．その仕上げは国際温度目盛（ある時期，国際実用温度目盛とも呼ばれた）の制定であった．

温度計測の基準は熱力学温度であるべきだが，日常の，あるいは産業上の温度計測のすべてを，気体温度計などの，原理は明快だが構造・操作が複雑な装置で行なうのは煩に堪えない．もっと使いやすい温度計を選び，仕様や使用条件を規格化しておけば，熱力学温度に充分よく近似する温度を，過大な労を費やさずに求めることができるのではないか．

この発想が結実して，1927 年に国際温度目盛が協約された．その仕組みを略述すれば次のとおり——温度定点（1 気圧下での純物質の 2 相平衡温度）6 個を選び，それらの熱力学温度の実測結果の最も確からしい値を協約した上で，3 つの温度領域ごとに標準的な［温度と他の物理量との関数式］を設定し，温度定点での関数値の実測値を用いて関数式の係数を決定した後，任意温度でのその物理量の実測値からの逆算で得られる温度を「国際温度目盛による温度値」とするのである．「他の物理量」としては純白金の電気抵抗，白金—白金ロジウム 10%熱電対の起電力，空洞放射の分光強度の三者が採用された．

さて，規約の詳細については当時の文献を参照していただかなければならないが，この略述の中に「熱電対」および「空洞放射」の語を見出す私たちは，またまたウイーンの名を想起せざるを得ない．1927 年代の国際温度目盛の 660℃～1063℃ の範囲は，ウイーンが 1890 年代に使い始めた熱電対をそっくり採用したのだ．また，いっそう重要なことだが，この温度目盛の 1063℃ 以上の範囲は「空洞放射に関するウイーンの法則」(1) に基づく式で定義されることになったのである．式を次に示す．

$$\log_e \frac{J}{J_{\mathrm{Au}}} = \frac{C_2}{\lambda}\left(\frac{1}{1336} - \frac{1}{t+273^\circ}\right).$$

この式は，ほかでもないウイーンの放射公式 (1)（1896 年）を，特定の 1 波長 λ および 2 つの温度（金の凝固点 1063℃= 1336 K と，定義すべき温度 t ℃）について書き，比の自然対数を取ったものであり，定数 C_2（詳細は後述）は 1.432 cm · 度とされた．

なお，この式は積 $(t+273)\cdot\lambda < 0.3\,\mathrm{cm}$ · 度の場合にのみ適用と限定的に扱われていた（低温・短波長でのみ熱力学温度を近似的に表わすという意味の限定である）．

この限定と関連して，ようやくプランク放射理論の (3) 式が国際協約中に登場する．メートル条約の組織下の測温諮問委員会（1937 年創設）の第 1 回会合（1939 年）で，国際温度目盛の改訂が提起

され，ウイーン式 (1) の代わりにプランク式 (3) が採用された．近似ではなく，量子論的にも正しい式が採用されたのである．ただし定数 C_2 の件には，他の物理定数と同様，数値の精密化という尽きせぬ課題が伴っている．

なお，1939 年に提起された国際温度目盛の改訂は，大戦の影響もあって，日延べとなり，戦後最初の国際度量衡総会（1948 年，前述）で公認の運びとなった．

2.5 ふたたび「焼きたてのパン」

ここで総括すれば，本稿の主題である「プランク定数 h と現代の計測標準」の相互関係は，この 1948 年の国際総会において初めてグローバルな認知を獲得したのであった．その推移を，歴史年代的に整理しておこう．

まず放射分光分布法則について，学会発表から国際協約採用までの時間差を計算すると

ウイーンの (1) 式の場合：
1927 年 − 1896 年 = 31 年,
プランクの (3) 式の場合：
1948 年 − 1900 年 = 48 年

となる．他方，プランク定数 h に即して言えば，彼がそれをエネルギー素量の式 $\varepsilon = h\nu$（ν ：振動数）に書いた最初は 1901 年初頭受理の論文であり，その h を含む $C_2 = hc/k$ が国際協定に登場したのは 1927 年であるから，時間差は

定数 h の場合：1927 年 − 1901 年 = 26 年

となる．どれを見ても，短い時間差とは言えない．

さて，温度標準変遷談を閉じるに当たって，私たちがこれまで度々話の種にしてきたウイーンの「焼き立てのパン」を，もう一度，考え直しておきたい．

ウイーン，プランクの放射法則は誠に「おいしい」パン種であって，理論・実験の両面に様々なパンを提供した．例えば理論ではアインシュタインの光量子論（1905 年），実験では光高温計（1901 年）が，「焼きたてのおいしいパン」の見本と呼べるだろう．

ただし，このパンへの愛着は，まずドイツ圏，次いで米国に限られていたようである（フランスでは，19 世紀末に放射利用の温度計測手段が考案されたのに，世紀の変わり目では独・米に遅れを取ったと，フランスの権威者が率直に認めている[4)]）．

温度標準についても，国立研究所の主導のもと，ドイツでは法定（gesetzlich な）規約に「焼きたて」の成果がそのまま採用されたし，米英でも同様な推移が見られた．フランスは，大革命期以来，メートル法の確立と普及をリードし，条約による活動の拠点をパリ郊外に提供したりしたものの，自国の標準には力を入れなかった．先進国の間でさえ，こうした格差があるのだから，後発国も含めた国際統一には手間がかかる．

現実に，標準関係の国際協約のうちメートルとキログラムとは，1889 年という早い時期に承認されたけれども，電気・光・熱に関しては 1920 年代以後に検討開始，戦後ようやく日の目を見るという状況であった．敢えて一括論評すれば，国際標準化の世界では「焼きたてのパン」は歓迎されてこなかったようである．

では，この世界では何が愛顧され尊重されてきたのか？ 老兵の率直な感想を言えば，愛顧・尊重の対象は「熟成した古酒」だったのではないか．温度標準の場合，ウイーン，プランクの「理論」はまさに古酒であろう．だが，それを更に熟成させるためには，穴蔵（空洞？）の中で大切に保管し養生してあげなければならない．養生とは何か？ その筆頭は，この理論に含まれる定数とくに $C_2 = ch/k$ の値の磨き上げである．h 値の変遷に関する別報[5, 6)]のほか表 1 を見ていただきたい．C_2 の値の変更に

表 1 国際温度目盛に採用された定数 C_2 の値の変遷（単位：m · K に統一）．

1927 年	0.014 32
1933 年	0.014 32
1948 年	0.014 38
同上 1960 年修正版	0.014 38
1968 年	0.014 388
同上 1975 年修正版	0.014 388
1990 年	0.014 388

伴う温度値の改訂といった数表が度々発表されてきた（私自身も，かつて手回し計算機で試算した）．

2.6 測光と測色

光度の単位カンデラをはじめ測光・測色の問題においても，プランクの熱放射式と定数とりわけ C_2 の協約値の件は，重大な意味をもっていた[5]．しかしながら，1979 年以後この分野は熱放射との繋がりをもたなくなったので，言及は見合わせる．

2.7 電気計測の標準と ジョセフソン効果・量子ホール効果

電気計測標準の世界は早くから国際色ゆたかで，アンペール，クーロン（仏），ボルタ（伊），オーム，ヴェーバー，ヘルツ（独），ファラデー，マクスウェル（英），テスラ，ヘンリー（米）といった人名が単位の呼び方に反映しており，また，ケルビンらが参加した英国の研究委員会の貢献も大であったが，水銀の抵抗器などが標準とされた時期もあって，物性依存の度が高かったことは否定しがたい．物性を脱し力学量直結を意図した新しい単位の体系は，電流の力学的作用に着目した電流の単位「アンペア」を基にして構成され，今日の国際単位系に織り込まれていて，その限りではプランク定数と無縁である．

ただし現今，電圧標準はジョセフソン効果（1962 年に理論的予言，1973 年ノーベル賞）で，また電気抵抗標準は量子ホール効果（1980 年に提案，1985 年ノーベル賞）で定められ，ともに定数 h と直接に結び付いている．まさに「焼きたてのパン」だ！関連定数値の 10^{-8} オーダーの吟味など紹介したいところだが，電圧・電気抵抗の単位は SI 基本単位でないという官僚的な？ 理由と誌面の制限とから，言及は断念する．旧稿[5]および総合報告[7]を参照していただきたい．

3. 結びに

日本で計量計測の標準が公共の仕事として初めて取り上げられたのは，1903 年，中央度量衡器検定所が設立されたときであった．今年はその百年に当たるので，記念の行事が進められている．それに先立ち，独立行政法人産業技術総合研究所の計測標準総合センター（http://www.nmij.jp/）が編成されて，研究・実務の体制の分野間総合化が達成されたのは誠に慶ばしい．だが，本稿で話題にした独米の国立機関の百年前の姿は，私たちにとって，今なお教訓的だと言えそうである．こだわり過ぎとは思うが，焼き立てのパンと豊潤な古酒の味の違いなども，折々に論じてみるとよろしいのではないだろうか．

参考文献

1) 天野清『熱輻射論と量子論の起原』，1943 年．「歴史的解説」の英訳は S. Takata and S. Hyodo: *Historia Scientiarum*（日本科学史学会欧文誌），**10-2** (2000), 185; **10-3** (2001), 255.
2) W. Wien: *Neuere Entwicklung der Physik und ihrer Anwendungen*, 1919, S. 86. 1) に抄訳．
3) *Temperature, its Measurement and Control in Science and Industry*, 1941, p.17.
4) G. Ribaud; *Pyrométrie Optique*, 1931, Introduction, xiv.
5) 高田誠二：計量史研究，**22-1** (2000), 17.
6) 西條敏美：数理科学，本号．
7) 大苗敦・藤井賢一：数理科学，No.465, 2002 年 3 月，52.

（たかだ・せいじ，久米美術館）

プランク定数の最確値研究の歴史的一断面

芝　亀吉（1897〜1996）とその時代

西條　敏美

1. はじめに

科学の研究においても，それぞれに一つの時代というものがある．19 世紀も暮れようとする 1900 年 12 月，熱輻射の研究から，自然のもっとも奥深い所に隠されていた定数，プランク定数 h が発見された．この定数 h は，万有引力定数 G，真空中の光の速度 c，電子の電気量 e，いわゆる電気素量などとともに重要な自然定数だ．

ひとたび新たな定数が発見されると，多くの実験家の手でその精密値の測定実験が行われるのが普通である．プランク定数 h は，独立の測定では決定できず，少なくとも電子の電気量 e を利用しなければならなかったので，他の定数とともに，その精密値の測定研究が数多く行われた．20 世紀の初期は物理学の理論研究が発展した時代であるが，一方では定数の精密値測定の時代と言ってよいかもしれない．さらに，そこから一歩進んで，多くの精密値を比較研究し，その定数のもっとも確からしい値，最確値を決定するという仕事も行われた．



芝　亀吉（1897〜1996）．

この地味な仕事を 1930 年代にやり遂げた日本人がいる．芝　亀吉がその人である（写真）．その成果は昭和 19 年（1944），『物理常数表』（岩波書店）となって実を結んだ．

私はこの誉れ高い本を実際には見たことがなかったが，平成 12 年（2000）7 月のある日，徳島市万代町のある家にて，見ることができた．刊行後半世紀をけみして，全体に黄ばんでいた．数値ばかりが縦横に並んだだけの本であった．奥付を見ると確かに初版第 1 刷は昭和 19 年とあるが，ここで手にしたのは，昭和 22 年刊の第 3 刷であった．私は書名だけはよく聞いていた本を手にして感慨ひとしおであった．

この家は芝　亀吉の実家に当たる兄の家であった．突然の訪問であったが，兄は死去し，今はその子どもの代になっていて，その奥さまらしい人が応対してくれた．幼少のころの亀吉は，「気がかわいらしかった」とか「兄に対しては負けず嫌いであった」など微笑ましい思い出を語ってくれた．そして亀吉の著書などをどっさり持ってきてくれた．そのうちの 1 冊が『物理常数表』であった．

芝　亀吉が，プランク定数をはじめとする物理定数の最確値研究を本格的に開始し，最初の論文

を発表したのは1931年である．『物理常数表』に結実するまでそのころからでも十年余の年月がかかっている．1930年代は，基礎物理定数はほとんど出尽くして，後はその最確値を決定することが求められていた時代と言えよう．

芝　亀吉の名前も今となっては歴史の彼方に忘れ去られようとしている．彼の生涯と彼の研究を通してプランク定数の最確値研究の歴史的一断面を見てみることにする．

2. 芝　亀吉の生涯

芝　亀吉は，明治30年（1897）徳島市東新町に生まれている．東新町は，徳島駅から南へ10分ほど歩いた所のアーケード商店街辺りである（図1）．ここはひところ徳島市のもっとも賑やかな所だったが，今はその中心が駅前周辺に移っている．この商店街に入ってすぐの某銀行や書店のある辺りに亀吉の生家があり，「小倉屋」という大きな油問屋を営んでいたという．今はその面影はまったくないが，新町川に面し，物資の輸送にも便利であったのだろう．亀吉はそこの次男であった．18歳で旧制徳島中学校を卒業するや，徳島を離れ京都の第三高等学校に入学した．同校卒業後は，東京帝国大学理学部物理学科に入学した．

大学を卒業した後，理化学研究所研究員，台北帝国大学教授などを務め，戦後になって東京大学教授に迎えられた．その後も静岡大学教授，東洋大学教授などを歴任した．理学博士と工学博士の



図1　芝　亀吉の生家があった界隈（徳島市東新町）．

2つの学位を持つ．

晩年は，東京都文京区に居住し，90歳を越えてもなお元気であったが，老いには勝てず，平成8年（1996），満98歳で亡くなっている．

著書には，『温度』『熱学』『熱力学』（いずれも岩波書店）のような解説書の他に，『単位の話』（朝日新聞社）といった著作がある．訳書としては，プランクの『熱力学』（岩波書店）などがある．

なお生家は，兄の代になって東新町から先に述べた万代町へと移転している．父母の墓は徳島市伊賀町の光仙寺に，亀吉本人の墓は千葉県松戸市の八柱霊園にある．

3. 芝　亀吉が定数値研究を始めたきっかけ

1975年芝　亀吉79歳のときに，弟子たちによって『計測工学論文集』なる論文集が出されている．和文・英文の81篇の論文が収められているが，うち72篇が計測工学に関する論文で，残り9篇が物理定数に関する論文である．著者は，全体の序文および物理定数の序文で定数値研究を始めたきっかけを回想している．

それによると，著者は，最初は熱学，とくに熱力学と気体論を勉強していたと言う．気体論にしばしば現れるアボガドロ定数 N_{A} は，電子1個の電気量 e とファラデー定数 F から算出される（$N_{\mathrm{A}} = F/e$）．

ところが，当時（1920年代）の物理定数の研究者バージは，電子の電気量 e について，ミリカンが油滴実験から得た値 4.768×10^{-10} esu と，X線結晶解析から得た値 4.803×10^{-10} esu とは，とうてい説明できないほど異なっているとし，電子の電気量 e に2種の値があるのではないかと指摘したと言う．4.768と4.803，この2つの値を同じものと見るか，異なるものと見るか，2桁で見るならば，両者は同じ値4.8になってしまうが，バージは異なるものと見た．著者は，「バージの考えに捕われず，独自に詳細な検討を加え，両者の値は完全に一致する」ことを結論づけた．つまり，ミリカンが採用した空気の粘度の値 $1822.6 \times 10^{-7}\,p$（p は

圧力）が正しくないことを見出し，文献の多くの測定結果から正しいと推定された値 $1831.7\times10^{-7}\,p$ を採用すると，ミリカンが得た電子の電気量の値が大きく変わり，4.806×10^{-10} esu となり，X 線結晶解析から得られた値とかなりよく一致することを示したのである．後に，バージも私信で著者の見解に賛成であると知らせてきたと言う．電子の電気量がひと通りの値として定着するまでに，著者の地道な研究があった．

この電子の電気量の研究を通して，著者は，原子定数など物理学の基礎定数の数値に重要な意味があることを認識し，他のいろいろな物理定数の最確値が広く科学・技術に必要であることに気付いたという．電子の電気量の精密値に関する研究（1931）から十年余にわたる研究の末，その成果は先に述べた『物理常数表』に結実した．本書は科学・技術研究のデータバンクとして広く利用され，著者の名を高めた．

著者が物理定数の最確値研究を行った 1930 年代は，著者個人にとっては，働き盛りの 30 代から 40 代のころで，理化学研究所に勤務していたころに当たる．若き日の芝　亀吉の名前は，寺田寅彦や中谷宇吉郎の著述にもわずかに出てくる．寅彦の大正 12 年（1923）9 月 17 日の日記には，「留守に来たりし人，芝亀吉君」などの字句が見えるし，宇吉郎の昭和 25 年（1950）のエッセイ「日本の心」には，理研で毎週木曜日の夜に行われていた雑誌会で，「電子の波動性というとんでもないことを提唱したドゥ・ブロイの最初の論文をたしか芝亀吉さんだったかが初めて読んだ」など当時が偲ばれる記述が見られる．

4. プランク定数の最確値研究に関する芝　亀吉の論文

芝　亀吉の物理定数の最確値研究は，電子の電気量 e から始まったが，もちろんそれにとどまることなく他の物理定数，わけてもプランク定数 h は彼にとって大きな関心事であった．

『計測工学論文集』に収められた物理定数に関する 9 篇の論文のうち，プランク定数そのものを主題にしたものが 1 篇，電子の電気量，比電荷，そしてプランク定数の 3 定数を同時に主題にしたものが 4 篇である．

具体的には次のようである．

① 「プランクの常数 h の値に就いて」『理化学研究所彙報』第 10 巻，第 8 号 (1931).

② 「電子の荷電量 e，比荷電量 e/m，および Planck の常数 h について」『科学』第 1 巻，第 2 号 (1931).

③④⑤「The Most Probable Values of e, e/m, and h (I)～(III)」*Sc. Pap. I.P.C.R.*, Vol.**19**, No.385 (1932). Vol.**21**, No.434 (1933). Vol.**34**, No.843 (1938).

5. プランク定数の値を決定する方法

ここでは，芝　亀吉の最初の論文①に基づいて，プランク定数 h を決定する方法にどんなものがあったのか見てみよう．

プランクが熱輻射のエネルギー分布式を発表したのは，1900 年のことである．亀吉の時代までに 30 年の時間があり，その間に，いろいろな方法で多くの測定が行われていた．亀吉は次の 7 つの方法を挙げている（ただし，彼が挙げた順番とは異なる）．

(1) シュテファン–ボルツマンの定数による方法
(2) ウィーン–プランクの定数による方法
(3) 光電効果による方法
(4) 連続 X 線の極限短波長による方法
(5) リュードベリ定数による方法
(6) コンプトン効果による方法
(7) イオン化電圧による方法

これらはそれぞれ，初期の時代からプランク定数を決定する代表的な方法であった．以下，当時を振り返りながら，それぞれの測定原理とその結果を見たい．

6. プランク自身の方法と彼が見積もった定数値

芝　亀吉は，(1) と (2) を独立した 2 つの方法としているが，プランク自身はこの 2 つを組み合わせて定数値を見積もっている．最初にプランク自身が，彼の論文で自らの定数値をどのように見積もっているか見てみよう．

プランク定数は，19 世紀末ドイツにおける熱輻射の研究から産まれてきた．

当時，高温の黒体から輻射されるエネルギーの分布式として，ウィーンの式（1886）

$$E = \frac{C_1}{\lambda^5} e^{-C_2/\lambda T} \tag{1}$$

が信頼されていた．ここで，T は絶対温度，λ は波長で，C_1, C_2 は定数である．C_1 と C_2 は，光の速度を c，プランク定数を h，ボルツマン定数を k として，

$$C_1 = 2\pi c^2 h, \quad C_2 = \frac{hc}{k} \tag{2}$$

で表せることが後に明らかにされた．

ところが，この式は波長の長い領域では実験と合わないことが明らかになった（図 2）．そこで，プランクは，ウィーンの論文を検討して，1900 年 10 月「ウィーンのスペクトルの一つの改良について」と題する報告を行った．この中で，プランクはエネルギー分布式として，

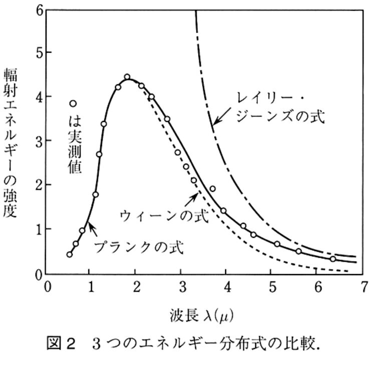


図2　3つのエネルギー分布式の比較.

$$E = \frac{C_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{C_2/\lambda T} - 1} \tag{3}$$

を与えた．さらに，同年 12 月には，エネルギー量子 $h\nu$ の考えを導入し，この式に理論的意味づけを与えた．この報告は，「正常スペクトルにおけるエネルギー分布の法則の理論」と題するもので，この中では，上の式とともに，振動数 ν で表した式

$$\mu\, d\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \tag{4}$$

も並び記されている．波長の短い領域における分布式は，ややおくれて，レイリー（1900）やジーンズ（1905）が与えたが，これは，上のプランクの分布式から導き出せるものであった．

ここで，プランクが自ら見出した定数に h の記号を当てたのは，もともとエネルギー量子 $h\nu$ の考えがエントロピーとの関連で導入されたことによっている．つまり，ボルツマンは，エントロピー entropy としてはじめ E の記号を用いたが，エネルギー energy と混同されるおそれがあるとして，後に H の記号を用いた．そこで，プランクは，これに対する小文字を自らの定数に当てたのである．

ところで，当のプランクは，h の値をどのように見積もっているのであろうか．それは，プランクの式（1900）をシュテファン–ボルツマンの T^4 則（1879, 1884）とウィーンの変位則（1893）に適用して算出しようとする方法である．

つまり，プランクの分布式 (4) より，熱輻射の全エネルギーは

$$\mu = \int_0^\infty \mu(\nu)\, d\nu = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} T^4 \tag{5}$$

と計算されるが，一方，シュテファン–ボルツマンの T^4 則（実験）によれば，

$$\mu = \sigma T^4,$$
$$\sigma = 7.061 \times 10^{-15}\, \mathrm{erg \cdot cm^{-3} \cdot K^{-4}}$$

であったから，両者を比較すれば，

$$\frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} = \sigma \tag{6}$$

となる．ここで，定数値を入れると，

表 1　プランクが示したプランク定数 h の値．

発表年	発表誌	$h[\times 10^{-27}\,\mathrm{erg\cdot s}]$
1900	*Ann. der. Phy.*	6.885
1901	*Ann. der. Phy.*	6.55
1906	熱輻射論　初版	6.548
1923	同　　第 5 版	6.525

$$\frac{k^4}{h^3} = 1.1682 \times 10^{15} \qquad (7)$$

が得られる．

また，式 (3) で $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\lambda = 0$ を満足する λ を λ_{m} とすれば，

$$1 = \left(1 - \frac{ch}{5k\lambda_{\mathrm{m}}T}\right) \mathrm{e}^{ch/k\lambda_{\mathrm{m}}T}$$

で，$ch/k\lambda_{\mathrm{m}}T = \beta$ とおけば，上式は，

$$\mathrm{e}^{-\beta} + \frac{\beta}{5} - 1 = 0$$

となる．この方程式を解けば，$\beta = 4.9651$ となる．したがって，

$$\lambda_{\mathrm{m}}T = \frac{ch}{4.9651 \times k}$$

で，ウィーンの実験によれば，$\lambda_{\mathrm{m}}T = 0.294\,\mathrm{cm\cdot K}$ であったから，両者を比較して，

$$\frac{k}{h} = 0.4866 \times 10^{-10} \qquad (8)$$

が得られる．したがって，式 (7), (8) より，

$$h = 6.55 \times 10^{-27}\,\mathrm{erg\cdot s},$$
$$k = 1.346 \times 10^{-16}\,\mathrm{erg\cdot K^{-1}}$$

が得られる．これがプランクが h を求めた方法と結果である (1901)．その後プランクは主著『熱輻射論』第 5 版（1923）では，

$$h = 6.525 \times 10^{-27}\,\mathrm{erg\cdot s}$$

を与えている（表 1）．

7. シュテファン–ボルツマンの定数による方法

芝　亀吉は，シュテファン–ボルツマンの定数 σ に注目してプランク定数値を算出した．すでに述べたように，この定数 σ は式 (6) で表せる．ところが，式中のボルツマン定数 k は，気体定数 R とファラデー定数 F，および電子の電気量 e を使って

$$k = \frac{R}{N_{\mathrm{A}}} = \frac{Re}{F} \qquad (9)$$

から求められるから，ここにプランク定数 h もまた算出できる．σ, R, F, e の多くの信頼できる測定値を検討して，亀吉がこの方法で得た h の値は

$$h = (6.607 \pm 0.022) \times 10^{-27}\,\mathrm{erg\cdot s}$$

であった．

8. ウィーン–プランクの定数による方法

芝　亀吉は，プランクのエネルギー分布式に現れる定数 C_2 に注目した．C_2 は，式 (2) で表される定数で，ウィーン–プランクの定数とも呼ばれる．

この定数 C_2 についても多くの精密な測定値があった．この中の k は上の式 (9) で求められるから，あとは光速度 c とから，h の値が算出できる．亀吉が得た h の値は，

$$h = (6.604 \pm 0.028) \times 10^{-27}\,\mathrm{erg\cdot s}$$

であった．

9. 光電効果による方法

光電効果を利用したプランク定数 h の測定は，ミリカンの名とともによく知られている．

ミリカンは，むしろ油滴実験による電気素量 e の決定者としてよく知られているが，h の測定実験も精力的に遂行した．e の測定実験は，1909 年から数年にわたって行われ，数多くの論文を発表しているが，この実験が一段落つくころから，h の測定実験に力点が移っていった．

光電効果の実験から h が求められるというのは次のような理由からである．

金属に光をあてると，その金属から電子が飛び出る．この現象が光電効果である．今，飛び出し

た電子の運動エネルギーは，入射光のエネルギー $h\nu$ からその金属の仕事関数 P を差し引いたものに等しいから，

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - P$$

で与えられる．一方，運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ は減速電圧 V を付加することにより，eV で測定されるから，

$$eV = h\nu - P$$

と書ける．これはアインシュタインの論文で定式化された式で，

$$V = \frac{h}{e}\nu - \frac{P}{e}$$

と書ける．したがって，V と ν を測定してグラフ化すれば，その傾きが h/e を与えることになる．こうして，e の値がわかっていれば，h の値が決定されることになる（図 3）．

ミリカンの実験報告は，最初 1914 年に 2 ページの短いノートとして発表された．翌 1915 年にも同じく 1 ページのノートを発表している．1916 年 30 ページに及ぶ論文を発表し，ここで，最終的な h の値として，

$$h = 6.57 \times 10^{-27}\,\mathrm{erg \cdot s}$$

を提出している．

亀吉は，ミリカンの測定値に補正を行い，その後に得られた測定値についても詳しい検討を行って，この方法で，プランク定数 h の値として

$$h = (6.633 \pm 0.034) \times 10^{-27}\,\mathrm{erg \cdot s}$$

を得た．

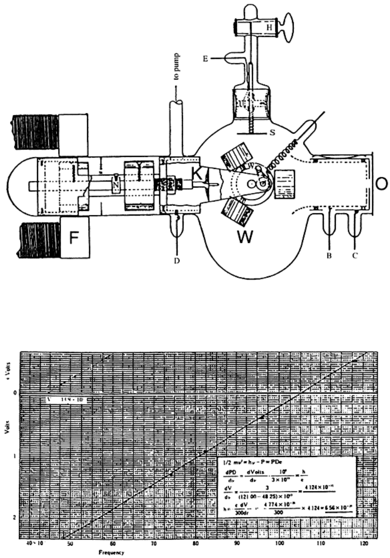


図 3　ミリカンの実験装置と実験結果（1916）．中心部の車輪 W には，アルカリ金属（ナトリウム，カリウム，リチウム）の試料が取り付けられている．これは，アルカリ金属は，仕事関数の値が小さく，可視光でも電子が飛び出るので，入射光の振動数領域が広げられるためである．管の外の電磁石 F によって作用する小刀 K によって，高度の真空中で各金属の表面を削り取って，新しくきれいな表面を作る．この表面に分光計から来た単色光を O を通してあてる．このとき，金属表面から飛び出た電子が反対側の金網の管に達するのをちょうど止めてしまうように負電位 V をかけ，このときの V を読み取る．振動数 ν をいろいろと変えて実験をくりかえし，その都度 V を読み取る．V と ν の関係をグラフに表すと直線となる．

10. 連続 X 線の極限短波長による方法

光電効果によって h を測定する実験が行われる一方で，また別の方法による測定実験も地道に行われていた．それは，連続 X 線の極限短波長の測定から求めようとするもので，1915 年にはまずデュエインとフントによって開始され，以後何人かの研究者がこの後に続いた．

その原理は次のようなものである．光電効果と逆の現象，つまり金属に高速の電子を衝突させると X 線が放射される現象がある．このとき出る X 線は，連続的に変わっている無数の波長をもつ連続 X 線と電子があたった金属元素固有の波長をも

つ固有X線が混じっている．

ここで，連続X線は，入射電子のエネルギーの一部または全部がX線の量子エネルギーに変わったものと考えることができる．今，電子を加速電圧 V で加速するときの運動エネルギー

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = eV$$

が全部X線の量子エネルギーになったとすれば，

$$eV = h\nu_{\max}$$

となり，最大振動数 $\nu_{\max}$ が存在することがわかる．この式は，デュエイン–フントの式と言われる．ここで $\nu_{\max} = c/\lambda_{\min}$ だから，極限短波長 $\lambda_{\min}$ で書き直すと，

$$eV = \frac{hc}{\lambda_{\min}}$$

となる（図4）．したがって，$\lambda_{\min}$ と V を測定し，c と e の値が分かっていれば，上式から h の値を決定することができる．

デュエイン–フントの論文は，「X線の波長について」と題する5ページほどのもので，この中で上述の原理が述べられている．

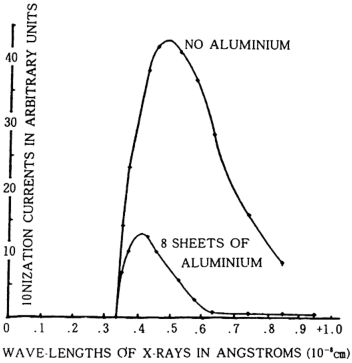


図4　デュエイン–フントの実験結果（1915）．入射電子のエネルギーのすべてが，X線の量子エネルギーに変わることがある．このとき，X線の波長は最短となる．これが横軸と交わる域値である．

最終的な h の値として，

$$h = 6.39 \times 10^{-27}\,\mathrm{erg \cdot s}$$

を与えている．

亀吉は，このデュエイン–フントの測定値をはじめ，その後の測定値を詳しく検討して，プランク定数 h の値として，

$$h = (6.627 \pm 0.005) \times 10^{-27}\,\mathrm{erg \cdot s}$$

を得た．

11. コンプトン効果による方法

コンプトン効果によってもプランク定数 h を算出することができる．

コンプトン効果とは，X線を金属の薄膜にあてたときに，散乱されるX線の中に，もとのX線の波長より長い波長のものが含まれる現象を言う．これは1923年コンプトンによって解明された．

これは，X線の粒子性を実証した現象である．今X線を光量子と考えて，X線光子と金属中の電子との衝突問題として，運動量保存の法則とエネルギー保存の法則とを連立して解くと，波長変化 $\Delta\lambda$ は，

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

で与えられる．

ここに，係数 h/mc は，直角方向（$\theta = 90°$）に散乱するX線の波長の増加を表していて，コンプトン波長と言われる．この値は実験で決定できるので，c と m の値から，プランク定数 h の値が算出できる．

亀吉は，シャルプ（1925）やキングリッヒ（1930）などの測定値と c と m の精密値の検討から，プランク定数 h の値として，

$$h = (6.641 \pm 0.011) \times 10^{-27}\,\mathrm{erg \cdot s}$$

を得た．

表2　芝　亀吉が1931年論文で示したプランク定数 h の最確値.

方　法	$h[\times 10^{-27}\,\mathrm{erg\cdot s}]$	重価	e の入り方
(1) シュテファン–ボルツマンの定数による方法	6.607 ± 0.022	2	$e^{4/3}$
(2) ウィーン–プランクの定数による方法	6.604 ± 0.028	1	e
(3) 光電効果による方法	6.633 ± 0.034	0.5	e
(4) 連続 X 線の極限短波長による方法	6.627 ± 0.005	50	$e^{4/3}$
(5) コンプトン効果による方法	6.641 ± 0.011	10	$e^{4/3}$
(6) リュードベリ定数による方法	6.639 ± 0.005	100	$e^{5/3}$
(7) イオン化電圧による方法	6.615 ± 0.014	6	e

h の平均値　$(6.634 \pm 0.005) \times 10^{-27}$ erg・s

12. リュードベリ定数による方法

高温の気体原子は，その原子固有の線スペクトルを持つ光を放射する．このときの線スペクトルの規則性を定式化したときに浮かび上がってきたのが，リュードベリ定数 R である．その名が示す通りに，1890年のリュードベリの論文で最初に現れ，理論的には1913年のボーアの論文で解明された．それによると，リュードベリ定数 R は，

$$R = \frac{2\pi^2 me^4}{ch^3}$$

で表すことができる．

したがって，実験による R の測定値と，c, m, e の各値からプランク定数が算出できる．亀吉はこの方法で，測定値の詳細な検討を行い，プランク定数 h の値として，

$$h = (6.639 \pm 0.005) \times 10^{-27}\,\mathrm{erg\cdot s}$$

を得た．

13. イオン化電圧による方法

イオン化電圧とは，気体中の基底状態にある原子から1個の電子を無限遠に引き離して1個の陽イオンと自由電子とに解離させるのに必要なエネルギーを電子ボルトの単位で表したものを言う．これは実験からその測定値が求められている．

また，先のボーアの理論から，これは

$$E = hcR$$

で与えられる．ここで，c は光速度，R は先のリュードベリ定数である．

種々の測定値を詳しく検討し，亀吉は，この方法からプランク定数 h の値として，

$$h = (6.615 \pm 0.014) \times 10^{-27}\,\mathrm{erg\cdot s}$$

を得た．

14. おわりに

芝　亀吉は，これら7つの方法で，プランク定数 h の最確値をそれぞれ決定し，さらにそれぞれの方法での重価をつけて平均した（表2）．なお，(1)〜(3) の3つの方法，「シュテファン–ボルツマンの定数による方法」「ウィーン–プランクの定数による方法」「光電効果による方法」は，いずれも重価はきわめて小さく，もっとも大きいのは (6) の「リュードベリ定数による方法」であった．その結果，この1931年の論文で亀吉が最確値とした h の値は，

$$h = (6.634 \pm 0.005) \times 10^{-27}\,\mathrm{erg\cdot s}$$

であった．その後の論文で，亀吉は少し修正しているが，1938年論文で示した最確値は，

$$h = (6.625 \pm 0.004) \times 10^{-27}\,\mathrm{erg\cdot s}$$

であった（表3）．なお1944年の『物理常数表』では，

$$h = 6.626 \times 10^{-27}\,\mathrm{erg\cdot s}$$

表 3　芝　亀吉が示したプランク定数 h の最確値.

発表年	発表誌	$h[\times 10^{-27}\,\mathrm{erg\cdot s}]$
1931	理化学研究所彙報	6.634 ± 0.005
1931	科学	6.621
1932	*Sc. Pap. I. P. C. R.*	6.624 ± 0.007
1933	*Sc. Pap. I. P. C. R.*	6.632 ± 0.005
1938	*Sc. Pap. I. P. C. R.*	6.625 ± 0.004
1944	物理常数表	6.626

の値が採用されている．ちなみに，最新の『理科年表』に取り上げられている値は，

$$h = (6.62606876 \pm 0.00000052) \times 10^{-27}\,\mathrm{erg \cdot s}$$

である．

亀吉は，物理定数の最確値研究を通して，計測方法および計測器があらゆる科学・技術に重要であることを痛感し，後半生は，温度，熱，密度，粘度など物性の計測工学の研究を進めて行くようになる．それはまた一つの時代の終わりを告げるものと言えよう．

参考文献

1) 芝　亀吉著『計測工学論文集』(工業技術社，1975).
プランク定数を初めとする物理定数の測定史については，次がある．
2) 西條敏美著『物理定数とは何か』ブルーバックス（講談社，1996).
3) 西條敏美著『物理定数の探究史』(徳島科学史研究会，1996).
プランクの生涯とその著述の翻訳として，例えば次がある．
4) 高田誠二著『プランク』センチュリーブックス，人と思想（清水書院，1991).
5) ハイルブロン著，村岡晋一訳『マックス・プランクの生涯』叢書ウニベルタス（法政大学出版局，2000).
6) 物理学史研究刊行会編『熱輻射と量子』物理学古典論文叢書 1（東海大学出版会，1970). プランクの 5 篇の論文の他に，ウィーンやレイリーの論文が訳出されている．
7) 天野清訳編『熱輻射論と量子論の起源―ウィーン，プランク論文集』科学古典叢書 I（大日本出版，1943).
8) プランク著，西尾成子訳『熱輻射論』物理科学の古典 7（東海大学出版会，1975).

（さいじょう・としみ，徳島県立徳島中央高校）

Summer School「数理物理 ’03」

流体力学・乱流の数理

日時：2003 年 9 月 6 日(土)～9 日(火)

会場：東京大学大学院数理科学研究科
大講義室
（京王井の頭線駒場東大前駅下車 すぐ駅前）

講師と講演題目（各講師 90 分 × 3 コマ）

有光敏彦（筑波大学・物理系）：
乱流のマルティフラクタル解析

小川知之（大阪大学・基礎工学研究科）：
周期波の弱非線形解析

木田重雄（核融合科学研究所）：
乱流力学―渦構造と統計法則

福本康秀（九州大学・数理学研究院）：
Euler–Poincare 形式による
渦のトポロジーと力学

定員：申込み順で先着 200 名です．

参加費：3,000 円を当日に会場受付で集めます．予稿集（当日配布），茶菓子代などにあてます．

参加申込：7 月 31 日までに，氏名，所属，身分，連絡先の住所（夏休み中のものも）と電話番号，または e-mail address を明記して，e-mail またはハガキで下記宛に申し込んでください．

連絡先：〒 153–8914 目黒区駒場 3–8–1
東京大学大学院数理科学研究科　河東泰之
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

申込受付の通知について：e-mail の申込については確認のお返事をします．ただし河東の海外出張中は返事が遅れます．その他は，定員を越えた申込にのみ 8 月中に連絡します．電話での問い合わせにはお答えしかねます．

単発講演：講演希望の方は，題目，要旨と所要時間（30 分以内）を書いて 7 月 15 日までに上記連絡先に申し込んでください．今年のテーマに近い講演をお願いします．枠は 3 件程度の予定です．

なお，最新の情報については，
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/mp2003.htm
をご覧ください．

世話人：河東泰之，Yasuyuki Kawahigashi（東大数理）
小嶋　泉, Izumi Ojima（京大数理研）

Solid state physicsの起源と作用量子

植松 英穂

1. はじめに

現在，日本においてsolid state physicsの訳語として「物性物理学」という言葉が使われているが，「固体物理学」と直訳されることもある．ここで言う「固体」は，学校で教わる物質の三態「固体・液体・気体」の「固体」のことではない．また，物性物理学の教科書を開けると，そこには「結晶」の話が必ず出てくる．なぜ物性物理学では「結晶」を扱っているのであろうか．

これまでsolid state physicsの歴史については，断片的なものはあったが，その全体像については明らかにされてこなかった．以下では，「物性」そして「固体」と訳されている“solid state”が，どのような意味で使われるようになったのか，そしてsolid state physicsという物理学の一分野がどのように形成されてきたのかを明らかにしたい．

19世紀末頃に結晶の物理学的観点の研究が集大成され，また結晶の磁性が結晶構造との関係で実験的に研究されるようになり，solid state physicsと呼ばれるようになる物理学の分野が現れてきた．20世紀の初め，磁気の源としての粒子，すなわち磁子についての研究が行われ，ちょうどそのとき量子論が登場し，作用量子が注目されようとしていたため，磁子と作用量子の関係が議論された．solid state physicsの起源をどこに求めるのか，見方によって変わってくるが，現代的な原子物理学という観点から見ると，solid state physicsは磁子と作用量子の研究から始まったとも言えるであろう．

まず，solid stateの歴史的な意味を明らかにし，日本における「物性」の歴史を見る．そしてsolid state physicsの起源として「結晶」の研究の歴史を明らかにし，どのように磁子と作用量子が関係するようになったのかを見ていきたい．

2. solid stateとは何か？

物性物理学を学ぶ上で，C. Kittelの *Introduction to solid state physics* は必読の書であると言われている．Kittelはその第3版（1966）において，“The study of the physical properties of the solid state, viewed as a branch of atomic physics, began in the early years of this century. Solid state physics has come to mean the study of crystals and of electrons in crystals.” と書いている[1]．Kittelによるとsolid state physicsのキーワードは「結晶」と「電子」となっている．それではsolid stateとはどのような意味なのであろうか．

鉱物学者P. Grothは *Physikalische Krystallographie*（4.neuearbeitete Aufl., 1905, 部分英訳 *The optical properties of crystals* (1910)）の前書きにおいて，「結晶学はmolecular physicsの一分野と見なされなければならないこと，そしてW. Voigtがamorphous bodies（非結晶体）は微小結晶粒子の集合体であると考えて以来，その科学は一般的にmolecular physics of solidsと呼んでさしつかえない」と書いている[2]．すなわち，20世紀の初めにはsolidsという言葉は，現在の言葉で表すと“singlecrystal（単結晶）”と“polycrystal（多結晶）”の総称として使われるようになった．鉱物学においては伝統的にcrystalという言葉を単結晶の意味で使ってきたので，crystalを単結晶と多結晶を総称する言葉として使うことができなかったからである．W. Voigtの *Lehrbuch der Kristalphysik* (1910) においてKristalという言葉は単結晶の意味で使われている．

J.J. Thomsonにより1897年に電子が，E. Rutherfordにより1911年に原子核が発見され，そしてN. Bohrによって1913年に原子構造論が提出されるよう

になると，原子が物理的実在として認識されるようになった．それで molecular physics における molecule が原子として認識されるようになるとともに，molecular という言葉が消えていった．1925 年から 1926 年にかけて W. Heisenberg や E. Schrödinger によって量子力学が創られたことにより，原子物理学が形成されていった．それとともに 19 世紀末から Weiss により強磁性結晶（単結晶）[3] の磁性と結晶構造の関係を調べる研究が，1911 年には M. von Laue により X 線による結晶構造解析の研究が始められるようになり，solid state physics が形成されてきた．結晶の物理的性質を結晶の構造に基づいて解明していく研究は，この Weiss の研究から始まったものであり，solid state physics の起源と言えるであろう[4]．

このような solid state physics に対して，日本の訳語である物性物理学はどのように形成されてきたのであろうか．

3. 物性物理学の形成

日本で「物性」という言葉はいつ頃から使われてきたのであろうか．日本において「物性」というのは，長い伝統のある言葉であった．1884 年（明治 22 年）に発行された飯盛挺造編纂『物理學上編第十版』[5] を見ると「物性，平均，器機，運動，水學，氣學」と書かれている．この「物性」は「物体本性」の略で，通有性（填充性，定形性，拒性（碍性），惰性（習慣性），分性，氣孔又鬆性，變容性，引力，重量及ヒ比重）および偏有性（三態，凝聚力，固性，粘着力，弾力，結晶性）を意味している．この頃の「物性」には，まだ磁気的な性質や電気的な性質は含まれていなかったが，飯盛の著書の初版が出た直後，J.A. Ewing や C. Knott によって日本に磁性の研究が持ち込まれた．

Ewing は 1878 年に東京帝国大学に招聘され，彼の後任として Knott がその 5 年後に赴任した．原子モデルで有名な長岡半太郎は，Knott の勧めで磁歪の研究を 1888 年に卒業研究として行った．この研究は W. Thomson によって高く評価されたものとして知られている．長岡の弟子であった本多光太郎は，1907 年から 4 年間ヨーロッパに留学し，その間ベルリンで行った元素の磁化率の周期性についての研究は高く評価された．その後彼は，鉄鋼の研究や永久磁石鋼の発明などによって，鉄の神様と呼ばれるようになった．

寺田寅彦が M. von Laue の研究の影響で結晶の X 線回折の実験を行い，1913 年に W.L. Bragg とは独立に Bragg の条件式を導いたと言われている．寺田の弟子であった西川正治は 1914 年の日本数学物理学会常会において，X 線回折の方法によるスピネル属（スピネル（尖晶石）と磁鉄鉱）の結晶構造について講演し，翌年それを学会誌に発表したが，ちょうどその間に Bragg が磁鉄鉱の結晶構造についての論文を発表した．

Weiss による強磁性結晶の研究以降，鉄などの強磁性の単結晶を人工的に作る研究が行われたが，簡単に作ることができなかった．K. Beck は 1918 年にケイ素を含む鉄の単結晶を，C.A. Edwards と L.B. Pfeil は 1924 年に純粋な鉄の単結晶を作った．ちょうどこのときヨーロッパに居た本多から東北帝国大学金属材料研究所に，鉄の単結晶が作られたから日本でも早速その研究を行うようにという手紙が届き，茅誠司はその研究に着手した．茅は鉄，ニッケルそしてコバルトの単結晶を次々と作り，それらの磁気的な性質を研究したことにより世界的に有名になったことはよく知られている[6]．この茅の研究により日本の solid state physics は始まったと言ってよい．

それでは 19 世紀から 20 世紀にかけて行われた結晶の研究を見ていきたい．

4. 鉱物学的結晶学

結晶は鉱物学の研究対象であった．ここで言う結晶とは水晶に代表されるように大きな結晶体で，現在単結晶と呼ばれているものである．鉱物を外観の特徴に基づいて分類する方法は，G. Agricola によって 1546 年に初めて行われ，鉱物学の基礎が築かれた．R.J. Hauy は 1822 年に結晶の構造と形はそれを構成する極微の要素の形および配列に依存していると考え，結晶構造の研究を行った．C.S. Weiss は，1815 年に結晶面を結晶軸に基づいて表すこと（ヴァイスの記号）を考え，また立方晶系，正方晶系，6 方晶系，斜方晶系を定義した．K.F. Naumann は 1826 年に結晶軸を仮定することによって，結晶面の簡単な記号（ナウマンの記号）を考えた．現在では，W.H. Miller が 1839 年に提出した軸截分の逆数を整理した指数で表す方法（ミラー指数）が一般的となっている．

幾何学的な方法によって結晶の形を決めることは，最初 J.F.C. Hessel によって 1830 年に行われ，32 種類の格子形が計算によって求められた．A. Bravais は Hauy の結晶形に基づき，Hessel とは独立に 32 種類の

格子形を1849年に求めた．彼は空間格子を仮定し，現在知られている7種類の単位格子を導いた．空間格子における原子間の距離を理論的に求めたM. Laueは，それがX線の波長に等しいことを1911年に見出し，翌年弟子のW. FriedrichとP. Knippingとともに結晶のX線回折の実験を行った．同年W.H. BraggとW.L. Bragg父子は彼らの名で知られている条件式を提出し，X線による結晶構造解析の基礎が確立された．

5. 結晶物理学の形成

鉱物学的結晶学に対して，結晶の光学的，熱的，電気的，磁気的性質など，すなわち物理学的性質が調べられるようになり，19世紀後半は結晶学が鉱物学と物理学の複合研究領域へと移行しつつある時代であった．

結晶の光学的性質の研究は，E. Bartholinによって行われ，氷州石（方解石）の複屈折現象並びに異常屈折と正常屈折が1669年に発見された．C. Huygensは，結晶は極微の粒子が規則的に並んでいるという考えに基づいて氷州石の形，へき開性，複屈折現象を1690年に説明した．また彼は複屈折による光の偏りを発見したが，彼の理論では説明することができなかった．屈折を偏りの現象と関係づけて研究したのはE.L. Malusで，複屈折の結果変容した光は同じ性質を持つこと，そのような変容は結晶だけではなく反射によっても起こることを1808年に発見した．D.F.J. Aragoは，1811年薄く切った雲母を透過した光を複屈折性結晶に通したところ色偏光を発見した．

結晶の熱的性質の研究は，1824年にE. Mitscherlichによって行われ，等軸晶系の結晶を加熱するとすべての方向に同じように膨張するので，面角が変化しないことなどが発見された．

結晶の電気的性質についての研究は，加熱すると軽いものを引きつける性質（ピロ電気）を持っているセイロン島産の宝石トルマリンが18世紀にヨーロッパに持ち込まれたことに始まり，C. LinneによってLapis electricus（電気石）と名づけられた．この電気石はF.M.U.T. Aepinusによって1756年に詳しく調べられ，吸引力が生じる温度99.5～212°F（211.1～413.6°C）が明らかにされた．T. Bergmanは，電気石は熱そのものではなく，温度変化によって電気的状態になることを1762年に示した．結晶の圧電気現象は，J. CurieとP. Curie兄弟によって1880年に発見された．

結晶の磁気的性質についての研究は，内容が豊富であったため，solid state physicsが形成される母体となったものである．その始まりは磁石の研究であるが，鉄の原鉱石である磁鉄鉱は，天然磁石としてすでにギリシャ時代以前から知られていた．magnetという言葉は磁鉄鉱を産出した小アジアのMagnesiaという地名がその由来であると言われている．ローマ時代に原子論的自然観を主張したことで知られているT.C. Lucretiusは，鉄が磁石に引きつけられる現象を，磁石から飛び出した多量の原子が空気を打撃したことによって空虚な空間が生じ，その空間を目指して鉄の原子が飛んで行くからであると考えた．P. Peregrinusは1269年に球状磁石を考え，W. Gilbertは1600年にその概念を拡張して地球は大きな球状磁石であり，磁気は非物質的な形相によるものであると考えた．磁石についての研究はGilbert以後ほとんど進展がなかったが，J. Mitchellは1750年に磁気的引力と斥力は逆自乗則に従うと考えていた．この法則はC.A. de Coulombによって精密な実験で示され，Newtonの法則と同じ逆自乗則に従うことを1785年に明らかにした．彼は，極微の粒子からなる南方性と北方性という2つの磁気流体により磁気現象を解釈し，磁気的中性状態であれば磁気流体は物質の中を自由に移動できるが，変位した磁気流体は物質の粒子に閉じ込められ，自由に物質の中を移動できなくなると考えていた．Poissonによると，当時このCoulombの磁気流体説は奇妙な考えと見なされていたが，一般に受け入れられていたと言う．

磁気現象を最初に数学的に扱ったのはPoissonであった．彼は1824年にCoulombの磁気流体説に基づいて磁気現象を研究し，新たに極微のelement magnetique（磁気要素）という概念を導入して，磁気現象を解釈した．彼は非結晶物質に生じる誘導磁化も扱い，磁化は磁気流体の量であるとし，磁化と磁場の一般的な関係を3次元直交座標系を用いて，現在テンソルと呼ばれている方法で記述した．

Poissnは磁気要素の形やその配置が異なると，引力や斥力の大きさも異なり，そして物体の状態（結晶体あるいは非結晶体）も異なると考えていた．彼は結晶というのは球状でない磁気要素が規則正しく配列していると考えていて，その場合に結晶には特有の力が働くであろうと予言した．

結晶の磁性を研究する上で，結晶の軸方向では「磁化と磁場の大きさは比例する」という「磁化の法則」は重要な概念であった．W. Thomsonがこの法則を理論的に提出して以来，結晶の磁性の研究者は，この

考えに基づいて結晶の研究を行っていった.

「磁化の法則」の起源は1820年にH.C. Oerstedにより発見された電流の磁気作用にある. 同年, D.F.J. AragoとSir H. Davyは独立に電流の磁化作用を発見した. この作用に基づく電磁石は, W. Sturgeonによって1825年に発明され, それを改良してJ. Henryは強力な電磁石を1831年に作った.

H.F.E. LenzとM.H. von Jacobiは彼らの作った電磁石に興味を持ち, コイルに流す電流の大きさと鉄芯に現れる誘導磁化の大きさとの関係を調べ, 電流と誘導磁化が比例することを1838年に明らかにした. それで磁化と磁場の大きさの比例性は, 当時"Lenzの法則"あるいは"Lenz・Jacobiの法則"と呼ばれた. このLenz・Jacobiの法則は, 1839年にJ.P. Jouleによっても独立に示された.

磁気と光との関係に関心を持っていたM. Faradayは, 空気, ガラスそして水を磁石に近づけると反発することを1845年に発見し, ビスマスの単結晶も同じ性質を持つことを示した. magneticという言葉は,「引き寄せられる」という現象について使われてきたので, Faradayは反発する現象をdiamagneticと名づけた. しかしその2つの現象を総称する言葉がなかったため, Faradayは磁石に引き寄せられる性質(鉄, ニッケル, コバルト, 酸素のような物質の性質)についてparamagneticという新たな言葉を導入し, magneticをdiamagneticとparamagneticの総称とすることを1850年に提案した. ところが化学では鉄を含む化合物についてferro-という接頭語を使っていた. 1850年にW. Gregoryは, Faradayの言うparamagnetismはferromagnetismとほとんど同じ意味であると言っている. 19世紀後半, paramagneticとferromagneticは全く同じ意味で使われてきたことに注意しなければならない. Faradayの考えを数学化したと言われているC. Maxwellはparamagneticとmagneticは同じ意味であると言っていて, Faradayに従っていない点が興味深い[7].

1851年に誘導磁化の理論的研究を行ったW. Thomsonは, すべてのdiamagnetic substancesと均質なfeebly ferromagnetic substances(現在の意味ではparamagneticのこと)においては, 誘導磁化と磁化力(磁場)は比例すると考えていたが, Lenz・Jacobiの法則は知らなかったとみえて, その法則のことを"磁化の近似的な法則"と呼んだ. 彼が近似としたのは, 飽和磁化のために磁場が弱い場合にしか成り立たないからである. W. Thomsonの研究以降, おそらく1880年過ぎであると思われるが, "Lenz・Jacobiの法則"は"磁化の法則"と呼ばれるようになった.

diamagnetismに興味を持ったJ. Plückerは, 結晶における光と磁気の関係に注目し, Poissonが予言した"結晶体に働く特有な力"を1847年に発見した. Plückerは, 電気石, 雲母, トパーズなどの結晶を使って実験を行い, 結晶の光学軸は磁極より反発されることを発見した. Faradayもビスマスを磁場の中に置いたとき, その軸が力線と平行になるという現象を1848年に発見し, それを"磁気結晶力"と名づけた. Faradayは最初自分の発見をPlückerの発見した現象と異なっていると考えていたが, 同じ現象であると認めた. Faradayはこの反磁性の発見をきっかけに, 磁気現象も近接作用論で解釈できることを示し, ある磁場の中にあるmagnetic substanceはその物体がないときにその位置にしめる磁力線の密度よりも大きな密度を持ち, diamagnetic substanceはより小さな密度を持つと考えた.

H. Knoblauchの下で学んでいたJ. TyndallはPlückerの研究に関心を持ち, Knoblauchと一緒に研究を行い, 必ずしもPlückerの言うように磁極から反発されるものだけではなく, 引き寄せられるものもあることを1850年に見出した. このKnoblauchとTyndallの実験に対してPlückerは, A. Beerと共同で書いた1851年の論文の冒頭で, 彼らが純粋でない結晶を使ったためであると反論している. 同論文で彼らは, 岩塩や蛍石のような等軸晶系の結晶は磁気的に等方的に振る舞うことを示した.

Poissonの理論を研究していたW. Thomsonは, 結晶あるいは非結晶を問わず誘導磁化はPoissonの式で記述されると考えていたが, TyndallとKnoblauchが自分の考えと異なる主張をしていたため1850年のBAASでそれを報告し, 翌年誘導磁化の論文を書いた. W. Thomsonは, 重ね合わせの原理によりPoissonの式を導くことができることを主張し, 磁気結晶力がこの式で基礎づけられると論文を締めくくった. 彼はFaradayの近接作用論で磁気誘起現象を理解し, 結晶の場合, 磁化の線と力線の方向は一般に一致しないが, 両者の方向が一致する"磁気誘導の主軸(principal axis of magnetic induction)"を考え, 結晶あるいは非結晶を問わず, すべての物体においては互いに直交している3つの主軸が存在することを主張した.

19世紀に出版された結晶磁性を扱っている電気学・磁気学関係の本を調べてみると, いずれもその現象はW. Thomsonの理論に基づいて書かれている. A.

Beer の *Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik* (1865), Maxwell の *A treatise on electricity and magnetism* (1873), E.E.N. Mascart & J.F. Joubert の *Leçons sur l'électricite et le magnétisme* (1882) などがあり，特に Mascart らの本は W. Thomson の理論に基づいて詳しく結晶磁性を扱っている．この本は評判が良かったらしく英語そして独語にも翻訳された．

W. Thomson の理論を等軸晶系の物質に適用すると，軸上では磁化の法則が成立するので，磁気的な振舞いと光学的な振舞いは一致していると考えられた．実際 Plücker と Beer がそれを実験的に示していた．F. Stenger は Mascart と Joubert の著書を通して W. Thomson の理論を知り，1888 年に方解石と石英（3 方晶系）を用いて実験を行い，彼の理論を検証し磁化の法則も証明した．

以上のように 19 世紀には結晶の光学的，熱的，電気的，磁気的性質の研究が出そろい，19 世紀後半において結晶学は鉱物学と物理学の複合研究領域となっていった．そして 19 世紀終わり頃から 20 世紀初頭にかけて，鉱物学者 P. Groth の *Physikalische Krystallographie* (1885) と T. Liebisch の *Grundriss der physikalischen Krystallographie* (1896)，そして物理学者 W. Voigt の *Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle* (1898) および *Lehrbuch der Kristallphysik* (1905) に見られるように，物理学的結晶学が集大成されていった．

6. 強磁性概念の登場

19 世紀後半, ferromagnetism と paramagnetism は同じ意味で使われてきたが, 19 世紀末頃になると, ferromagnetism を 2 つに分けるべきであるという意見が出てきて，今日知られる強磁性と常磁性概念が出てきた．

diamagnetism の現象に関心を持った W.E. Weber は，1848–1852 年に Ampère の分子電流[8] を使ってその現象を説明したが，すべての物質が diamagnetism になってしまうので，paramagnetism を説明するために永久分子電流が存在すると仮定した．ところが，弱い磁場でも物質が完全に磁化されてしまうので永久分子電流の回転を妨げるものとして分子磁石自体の相互作用を考えにいれた．このように Weber は磁性現象を説明したが，その理論では残留磁気を説明できなかった．彼は 1871 年分子電流の代わりに固定された電荷の周りを回っているその電荷とは反対の符号を持つ荷電粒子の運動を考えることにより，自分の理論を修正した．

Maxwell は 1873 年に，磁場をかけることにより分子磁石の軸のふれ角がある大きさ以上になると完全に元に戻らなくなると仮定することによって残留磁気の説明を試みた．しかし 1881 年に E.G. Warburg によって発見され，J.A. Ewing によってヒステリシスと名づけられた現象は，Maxwell の考えで説明することができなかった．Warburg とは独立にヒステリシス現象を発見した Ewing は，1890 年分子磁石の相互作用を考えることによりその現象を説明することができた．

このように残留磁気現象や磁気履歴現象が問題になってくると，ferromagnetism（=paramagnetism）を 2 つの種類に分ける必要があるという意見が 1890 年頃に現れ始め，1892 年に H. du Bois は現在知られているような ferromagnetism（強磁性）と paramagnetism（常磁性）という分類で研究を行った．paramagnetism と同じ意味の faiblement magnetiques という仏語は，1895 年に P. Curie が，当時分類されたばかりの 3 つの磁性の間の関係を調べる研究を行ったときに使われた．P. Curie は，昔からよく知られていた磁石を加熱するとその性質を失う現象と当時新たに分類された 3 つの磁性（ferromagnetiques, faiblement magnetiques, diamagnetiques）の関係に注目し，3 つの磁性体の温度依存性を調べた．そして彼は faiblement magnetiques と ferromagnetiques は移行し合うことを確認し，磁化の消失する温度を精密に測定した．

7. Weiss の結晶磁性研究

強磁性の概念が現れると，磁鉄鉱（等軸晶系）や磁硫鉄鉱（6 方晶系）が強磁性の結晶（単結晶）として知られるようになった．P. Weiss はそれらの磁気的な振舞いを結晶の形との関係で詳しく調べた最初の研究者であった．彼はまず磁鉄鉱を 1895 年に調べたところ，W. Thomson の理論に反した磁化の異方性を示す実験結果が出たため，当時たいへん話題となった．しかし Weiss の研究の進め方を見ると磁化の異方性の原因をその結晶構造から説明しているため，結晶の基本的性質としては W. Thomson の理論が成り立っていると考えていた．Weiss にとって W. Thomson の理論は指導原理であった．Weiss はこの研究により磁気現象と結晶構造が同時に考察できると考え，もう一つの強磁性結晶である磁硫鉄鉱の磁気的性質を調べた．

まず彼は1896年に磁気面というその面内でしか磁化されない現象を発見し，1905年には磁気面における磁化の異方性を明らかにした．彼は磁化の異方性の原因が反磁場にあると考え，結晶が無限に大きくそして歪みや欠損がなければ反磁場は生じることはなく，磁化は最初から飽和していると結論した．彼はこの最初から飽和している磁化の原因として「平均場（翌年に「champ moléculaire（分子場）[9]と改名」が存在するためであると1906年に考えた．そしてWeissはこの平均場を理論的に裏づけるために，CurieとLangevinの研究を利用して強磁性理論を1907年に構築した[10]．

8. 磁性の粒子論

1920年のS.D. Poissonの研究に始まる磁性の粒子論的解釈は，1890年のEwingによる磁気ヒステリシスの粒子論的解釈で成功を収めたことで，揺るぎない地歩を占めた．19世紀後半，磁性を粒子論で解釈することは多くの研究者に一般的に支持されるようになり，そのような状況の中で問題とされていたのは，磁性をいかにして粒子論で理解するかということであった．その結果，磁性体を構成する最小単位としての「磁子」という考えが20世紀初めに現れた．

電子がJ.J. Thomsonにより1897年に発見され，磁性の電子論が1902年にW. Voigt，1903年にJ.J. Thomson，1905年にP. Langevinにより展開された．VoigtとJ.J. Thomsonは磁性の説明に失敗したが，LangevinはH.A. Lorentzの電子論に基づいて反磁性体の磁化率を求めることに成功し，またキュリーの法則を説明した．スペクトルの研究をしていたW. Ritzは，1908年に原子内にはMagnetische Atomfelder（磁場的原子場）という強い磁場が存在し，その磁場の源は原子内のElementarmagnet（要素磁石）であると考えた．

A.L. Bauerは1910年にWashingtonで開催された物理学会において，磁性体における粒子は正イオンからなる内部の核の周りに電子が運動している原子の体系であるという考えを発表した．この体系は電子の回転によって磁気を生み出すため，彼はこれを“magneton（磁子）”と呼ぶことを提案した．同年のほぼ同時期に，R. Gansは円運動する電子の体系を“Magneton”と考えた．同じ時期にBauerとGansによりmagnetonという概念が提出され，磁気的な最小構成単位が活発に議論されるようになった．このような時期にWeissは彼らとは独立に，磁子を実験的に見出した．

9. Weissの磁子

Weissは強磁性体の温度変化が$T/\theta = (3/a)\cdot(I/I_0)$で表されることを1907年に示した．$\theta$はキュリー点，$I_0$は飽和磁化，$a = \mu H/kT$（$\mu$：1粒子の磁気モーメント）である．これによると，$T/\theta$と$I/I_0$とで示される曲線は，すべての強磁性体について同一であり，対応状態の法則が成立する．彼は磁鉄鉱を使ってこの法則を実験的に証明した．

Weissは1910年に，鉄，ニッケル，コバルトおよび磁硫鉄鉱の飽和磁化の強さを通常の温度において正確に求めようとした．分子場の仮説によるとla molécule magnétique（磁気粒子）の完全な整列に対応する絶対飽和は，有限の磁場については絶対零度でしか達成されない．このla molécule magnétiqueはRitzのElementarmagnetのことである．熱運動の生じない極低温における飽和磁化の値から逆にla molécule magnétiqueの磁気モーメントの値の総和が求められるはずであると考えたからである．それで彼は，分子場の仮説を確かめようとして，飽和磁化の正確な値を測定することを考えた．そして彼は，1910年にK. Onnesとともに実験を行い，鉄，ニッケル，コバルトが通常の温度においても対応状態の法則に従わないことを見出した．それで彼らは，磁気モーメントの値の総和を求めるために，大気圧および液体水素の温度（20 K）の状態の中で20,000 Gaussという強磁場の下で実験を行った．その実験結果によると，鉄，ニッケル，コバルトの飽和磁化の値は段階的となり，それらの値の間には簡単な関係が存在すると考えた．

Weissはその結果を踏まえて，飽和磁化の値からla molécule magnétiqueの磁気モーメントの値を求めようと考えた．彼は1911年に，非常に低い温度を除き対応状態の法則を満足する磁鉄鉱の磁化曲線を求めることにより，絶対零度における飽和磁化の値を得ようと考えた．彼は磁鉄鉱の磁化曲線を検討することにより飽和磁化の値が整数比となることを見出し，磁気モーメントの値には整除数（最大公約数）があることを確信した．そこでWeissは整除数を求めるために，K. Onnesとの実験によって測定された飽和磁化の値を検討した．その測定結果は

ニッケル・・・ 3381
コバルト・・・ 9630
鉄・・・・・・12410

磁鉄鉱・・・・ 7417

であった．

彼は，コバルトは構造の非等方性とヒステリシスにより磁化状態が変わりにくいために飽和は困難であり，磁鉄鉱は磁気結晶のために飽和磁化の値はあやしいと考え，鉄とニッケルの値に注目した．Weiss はニッケルと鉄の比が 3 : 11 であることに注目した．熱膨張に対して −4%の補正を行い，それぞれ 3 と 11 で割ると

ニッケル・・・ $3370 \div 3 = 1123.3$
鉄・・・・・・$12360 \div 11 = 1123.6$

となった．当時知られていたアボガドロ数（70.5×10^{22}）で磁気モーメントの平均値（=1123.5）を割ると，15.94×10^{-22} を得た．Weiss はこのグラム原子の磁気モーメントを “magnéton” と命名した．彼はこの磁子は多くの原子に存在するので，磁子は電気学における電子と同様に磁気体の構成要素であると 1911 年に結論した．

10. 磁子と作用量子

Weiss は 1911 年 9 月に開催されたドイツ自然科学者医学者大会において磁子の研究を発表した．講演後の討論で，磁子と作用量子 h の関係が議論された．M. Abraham は電子の磁気モーメント μ と作用量子を次元解析によって結びつけ $\mu \propto eh/mc$ を得た．Gans は運動エネルギーを量子化することにより，Weiss の磁気モーメントの値の 10 倍の値を得た．Weiss は，磁子と Ritz の Elementarmagnet とを同一すべきは長さであって，原子の大きさが 10^{-8} cm であるので磁子の長さを 10^{-10} cm とすれば調和がとれていると返答した．

作用量子についての当時の状況を見てみよう．作用量子を最初に固体の問題に導入したのは A. Einstein による 1906 年の固体の比熱の理論[11]であった．W.H. Nernst による低温比熱の実験的研究が Einstein の比熱理論と調和したので，1910 年頃から Nernst は量子論を支持するようになった．また A.F. de Haas が 1910 年に原子の問題に作用量子を使ったため，作用量子が注目されるようになった．

1911 年 10 月から開催された第 1 回 Solvey 会議において，Langevin は分子の磁気モーメントは電荷 e，質量 m の電子の中心の周りに回転すると仮定し，A. Sommerfeld の量子化条件 $\int_0^\tau (T-U)\,dt = h/4$（$\tau$：周期，

朝倉書店

統計分布ハンドブック
蓑谷千凰彦著
A5判 744頁 本体22000円 (12154-7)
統計に現れる様々な分布を可能な限り多く集め，その特性・数学的意味・展開などを，グラフを豊富に織り込んでわかりやすく，かつ詳細に解説。〔内容〕数学の基礎（基本的概念／関数／テイラー展開／微積分）／統計学の基礎（確率関数，確率密度関数／分布関数／積率他）／極限定理と展開（分布収束／確率収束／大数の法則／中心極限定理他）／確率分布（アーラン分布／安定分布／一様分布／ウィッシャート分布／F分布／カイ分布／カイ2乗分布／ガンマ分布／コーシー分布他）／他

統計ライブラリー **共分散構造分析［技術編］** —構造方程式モデリング—
豊田秀樹編著 A5判 248頁 本体3900円 (12664-6)
共分散構造分析を具体的な場面に適用するために役立つさまざまなテクニック・決め技を伝授する。〔内容〕因子分析／一対比較法／コンジョイント分析／遺伝的アルゴリズム／ブートストラップ法／双方向モデル／行動遺伝／回帰／プログラム／他

すうがくの風景 8 **グレブナー基底**
日比孝之著 A5判 200頁 本体3300円 (11558-X)
組合せ論あるいは可換代数におけるグレブナー基底の理論的な有効性を簡潔に紹介。〔内容〕準備（可換環他）／多項式環／グレブナー基底／トーリック環／正規配置と単模被覆／正則三角形分割／単模性と圧搾性／コスツル代数とグレブナー基底

講座 数学の考え方17 **フーリエ解析学**
新井仁之著 A5判 276頁 本体4600円 (11597-0)
多変数フーリエ解析は光学など多次元の現象を研究するのに用いられ，近年は画像処理など多次元ディジタル信号処理で本質的な役割を果たしている。このように応用分野で広く使われている多変数フーリエ解析を純粋数学の立場から見直す

Excelによる確率入門
縄田和満著 A5判 192頁 本体2900円 (12155-5)
「不確実性」や統計を扱うための確率・確率分布の基礎を解説。Excelを使い問題を解きながら学ぶ。〔内容〕確率の基礎／確率変数／多次元の確率分布／乱数によるシミュレーション／確率空間／大数法則と中心極限定理／推定・検定，χ^2，t，F分布／他

朝倉物性物理シリーズ 3 **量子光学**
久我隆弘著 A5判 192頁 本体4200円 (13723-0)
基本概念を十分に説明し新しい展開を解説。〔内容〕電磁場の量子化／単一モード中の光の状態／原子と光の相互作用／レーザーによる原子運動の制御／レーザー冷却／原子の波動性／原子のボース・アインシュタイン凝縮／原子波光学／他

*本体価格は消費税別です。(ISBN) は 4-254- を省略
〒162-8707 東京都新宿区新小川町6-29
電話 営業部 (03) 3260-7631 FAX (03) 3260-0180
http://www.asakura.co.jp HPで新刊案内メール会員募集中

T:運動エネルギー, U:位置エネルギー)を用いて1モルグラムの磁気モーメント $I_0 = (NAeh/2\pi m) = 1080$ を得た．彼は，Weiss の磁子の値 1123.5 と比較すれば，驚くべき一致が得られるとして，Weiss の磁子を支持した．

原子物理学の父と呼ばれるようになる N. Bohr は，この Weiss の磁子について関心を持っていることを 1911 年 12 月の W. Ossen への手紙で書いた．Bohr は, 彼の原子構造論を提出したことで知られている 1913 年の 3 部作の論文の中で，1 つの円軌道を回る 1 つの電子による磁気モーメントは角運動量に比例するので, Weiss の磁子理論と関係していると指摘したが，詳細な理論の展開はしなかった．この問題は，Bohr の未発表の手稿の中に書かれていた．この詳細な理論は 1914 年に H.S. Allen の寄書において公表された．そこには次のように書かれている．

> 「1 つの円軌道にある 1 個の電子（質量 m，電荷 e）に起因する磁気力は, 円軌道の半径に比較して遠い距離において, $(1/2c)\cdot(e/m)\cdot\mu$ の磁気モーメントを持つ小さな磁石による磁気力と近似的に等しい．ここで μ は円軌道の中心を回る電子の角運動量である．従って, 今言及した理論と Weiss により提出された磁子の理論との間の緊密な関係が期待されよう．Weiss の理論によれば，常磁性物質の原子は数多くの小磁石を含み, 小磁石の磁気モーメントはすべての物質において同一である．ある物質のすべての原子は角運動量 $h/2\pi$ を有する円軌道を回転する単一電子を含み，グラム原子中の磁気モーメント M に対しては $M = (NAeh/4\pi m\,\mathrm{cm})$ の値を得る．$NA, e/m, h$ に既知のデータを代入すると，$M = 0.561 \times 10^4$ を得る．Weiss によって計算されたグラム原子の磁気モーメントの値は，$1123.5 = (1/5) \cdot 5618$ である」

Weiss の磁子理論はちょうど作用量子が注目されつつあるときに出されたため, Gans, Langevin, Bohr たちは磁子を作用量子との関係で理論的に裏づけようと試みた．しかし, Bohr による磁子の理論的な値は Weiss の 5 倍の値となった[12]．

その後, Weiss の磁子については, 精密な検証実験が行われ, 実験値と合わないことが明らかになっていった．

現在，Weiss の磁子は完全に歴史の中に埋もれてしまっているが, Bohr の磁子は「ボーア磁子」として電子の磁気モーメントの量子力学的単位として知られている．

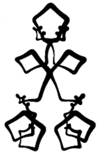
以上見てきたように，solid state physics は 19 世紀の末に集大成された結晶物理学が母体となって形成されたものである．特に，Weiss から始まる結晶の構造に基づく磁気的な性質の解明の研究は，結晶物理学の中心的な研究課題となっていった．その結晶磁性の研究から生まれた磁子は，ちょうど原子物理学が作られるときと重なっていたため，最初から作用量子と関係づけられて議論されたのであった．

注

1) 日本語訳（宇野他訳，『新版固体物理学入門』，丸善，1968）があるが, the physical properties of the solid state を「固体物性」と訳している．「固体物理学」と「物性物理学」が同じであることをふまえると,「固体」と「物性」にはどのような違いがあるのか分からなくなってくる．
2) molecular physics における molecule は，現在「分子」と訳されるが, 19 世紀の結晶の研究を見ると，研究者によって molecule に対するイメージが異なっている．現在のような統一的な「分子」概念がない時代であったので,「粒子」と訳すべきであろう．
3) この時代にはまだ「単結晶」という言葉は使われていないが，ここでは分かりやすいように単結晶を使う．
4) これまで調べた限りでは，Kittel の *Introduction to Solid State Physics* の初版（1953）が出るまでは，本の題名としては solid state physics という言葉は使われていない．
5) 初版は 1874 年で W. Eisenlohr: *Lehrbuch der Physik zum Gebrauche bei Vorlesungen und zum Selbstunterrichte* (10., verb. & verm. Aufl, 1870) や Joh. Müller: *Lehrbuch der Physik und Meteorologie* (7. umgearb. und verm. Aufl, 1868) などに基づく翻訳．
6) 半澤朔一郎:『巨木・茅さん』, 中央公論事業出版, 1985.
7) J.C. Maxwell: A treatise on electricity and magnetism, 1873.
8) この「分子電流」は本来「粒子電流」と訳すべきであるが,「分子電流」として知られているため，ここでは「分子電流」を使用する．
9) この分子場も「粒子場」と訳すべきであるが, 現在「分子場近似」として使われているので，ここでは「分子場」を使用する．
10) Weiss が提出した分子場の仮説は，これまで Curie と Langevin の影響によって提出されたと言われてきたが，実際は，Weiss の実験結果から強く示唆されて導き出されたものである．Curie と Langevin の影響で Weiss を評価しているのは次の論文である．勝木渥，永井寛之，斎藤方成：“本多の磁気理論と，わが国における Weiss 理論の受容の過程”,『物性研究』, (41), 2 (1983), 96–191.
11) この Einstein の言うところの固体は，結晶を意味している．
12) Bohr の磁子についての研究は，岡田知二：『科学史研究』, No.205 (1998), 17–26. がある．

（うえまつ・えいすい，日本大学理工学部）

マクロな現象とプランク定数



鈴木　増雄

1. はじめに

1900年にプランクにより量子論が発見されて以来，すでに100年以上も経ち，我々の日常生活におけるその応用例も今や枚挙に遑が無い程である[1~3]．しかし，その原理的理解に関しては物理学を専攻した人々にとっても必ずしも充分であるとは限らないようである．むしろ，新しい発見とともに量子的な現象に対する興味と疑問は益々増えつつあるように思われる．本特集号の発刊もその現れであろう．筆者に与えられたテーマは「マクロな現象とプランク定数」であるが，これは「巨視的な量子現象」と言い換えることもできるであろう．「マクロ」とか「巨視的」というキーワードが入っているのは，量子論は原子とか電子というミクロの世界で成り立つものであるという常識に対して警鐘を鳴らす意味合いがあるのであろう．

さて，巨視的な世界も電子や原子核など量子力学に従う粒子から成り立っているのであるから，量子的な現象が巨視的に観測されるのは，ごく自然なことである．例えば，いろいろなIT器機によく使われている材料の一つである半導体は，量子統計の基本の一つであるフェルミ統計によってその電子的振舞いが記述される．パウリ原理が巨視的に観測されていると言ってもよいであろう．また，金属の比熱は，常温でも，温度 T に比例することが実験的に確かめられている．通常の金属では，量子効果は1万度くらい（フェルミ温度）まで現れる．したがって，常温はこの意味では「低温」である[4]．最近，高温超伝導とか低温核融合というような言葉が流行しているが，この場合の「高温」とか「低温」という言葉は，多分に心理的な（または実用的な）使われ方になっている．前者の場合，量子効果が現れるという意味では充分低温なのである．後者の場合，固体中で原子核の崩壊が起こり得るくらいのポテンシャルの状況が作り出せるのであれば，原子核にとっては「高温」と言えるであろう[5]．

以上，いくつかの例をあげながら，量子現象が巨視的に現れることを述べたが，これらの現象は本質的に2種類に分類される．パウリ原理，したがってフェルミ統計の特徴は，原子や分子のレベルで現れるだけでなく，粒子数がアボガドロ数（$N \sim 10^{23}$ 個）くらいの巨視的な数になっても，（フェルミ温度に比べて）低温では現れ，量子効果が観測される．半導体などはその例である．これが「第1種の巨視的量子現象」である．それに対して「第2種の巨視的量子現象」とでも呼べるものは，超伝導体や超流動のように，真に熱力学的極限（$N \to \infty$）で初めて自発的に対称性が破れて起こる現象である．ここでは，後者のマクロな量子現象のメカニズムを相転移という視点[4,6~11]で議論したい．

2. マクロな量子現象とコヒーレンス

前節で述べた「第2種の巨視的量子現象」は「量

子的なコヒーレンス」で特徴づけられる．そこで，まず，一般に「コヒーレンス」という概念について説明したい．一番馴染みのある例は，レーザーのコヒーレンスであろう．これは，電磁波の位相が巨視的に揃った状態である．これは，言わば古典的にも理解できる状態である．これを量子的に扱うと次のようになる．電磁波を量子化すると光子というボース粒子系になる．このボース粒子の生成演算子と消滅演算子をそれぞれ $a^\dagger, a$ とする．その粒子数演算子 $a^\dagger a$ の固有状態を $|n\rangle$ $(n=0,1,2,\cdots)$ とする．これらの線形結合を用いて，消滅演算子 a の固有状態を作ると

$$|z\rangle = \mathrm{e}^{-|z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{2.1}$$

となる[3)]．すなわち，$a|z\rangle = z|z\rangle$ および $\langle z|a^\dagger = \langle z|z^*$ である．ここで，z は複素数である．そこで，$z=|z|\mathrm{e}^{i\varphi}$ とおくと，

$$\langle z|a|z\rangle = |z|\mathrm{e}^{i\varphi}, \quad \langle z|a^\dagger a|z\rangle = |z|^2 \tag{2.2}$$

であることがわかる．したがって，(2.1) の $|z\rangle$ という状態は，平均粒子数が $|z|^2$ で，a の期待値の位相が φ の「コヒーレント状態」である．このコヒーレント状態を座標表示で表すと，最小不確定波束の状態になっていることが容易に示せる．

このように単純なコヒーレント状態でなく，真に量子コヒーレンスを持った状態は，熱力学的極限で自発的に対称性の破れた量子状態として実現される．このような状態は，(2.1) を一般化した次のような状態として表される[12)]．

$$|\Psi(\varphi)\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} c_N \mathrm{e}^{i\varphi N}|\Psi(N)\rangle. \tag{2.3}$$

ただし，係数 c_N は実数である．位相 φ を演算子として，その期待値 $\langle\Psi(\varphi)|\varphi|\Psi(\varphi)\rangle$ を (2.3) を用いて表すと

$$\begin{aligned}
&\langle\Psi(\varphi)|\varphi|\Psi(\varphi)\rangle \\
&= \sum_{N,N'=0}^{\infty} c_{N'}c_N \mathrm{e}^{-i\varphi N'}\varphi\mathrm{e}^{i\varphi N}\langle\Psi(N')|\Psi(N)\rangle \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} c_N^2 \mathrm{e}^{-i\varphi N}\left(-i\frac{\partial}{\partial N}\right)\mathrm{e}^{-i\varphi N}\langle\Psi(N)|\Psi(N)\rangle \\
&= \left\langle\Psi(\varphi)\left|-i\frac{\partial}{\partial N}\right|\Psi(\varphi)\right\rangle.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

よって，

$$\varphi = -i\frac{\partial}{\partial N} \tag{2.5}$$

と解釈できる．したがって，粒子数 N と位相 φ は次の交換関係を充たす：

$$[N,\varphi] = N\varphi - \varphi N = i. \tag{2.6}$$

すなわち，2 つの量は互いに不確定性関係 $\Delta N\cdot\Delta\varphi \geq 1$ にある．位相が揃ったコヒーレントな状態では，粒子数は不確定である．$N\to\infty$ の熱力学的極限では，位相 φ の確定した状態が実現できる．これを相転移の視点で捉えると，元のハミルトニアンは，粒子数を保存していても，そのゲージ対称性を破るような共役な外場を入れておき，熱力学的極限（$N\to\infty$）を先にとってから，外場を零にすると，自発的な対称性の破れが起こり，量子的なコヒーレンスを持った状態が実現される．このような状態を特徴づける方法として，C.N. ヤング[13)] は次のような非対角長距離秩序（Off Diagonal Long Range Order，略して ODLRO）という概念を導入した．すなわち，ボース粒子系に対しては，

$$\langle\psi^\dagger(0)\psi(\boldsymbol{R})\rangle \xrightarrow{R\to\infty} \Psi_1^*(0)\Psi_1(\boldsymbol{R}), \tag{2.7}$$

フェルミ粒子系に対しては，

$$\langle\psi_2^\dagger(0)\psi_1^\dagger(0)\psi_1(\boldsymbol{R})\psi_2(\boldsymbol{R})\rangle \xrightarrow{R\to\infty} \Psi_2^*(0)\Psi_2(\boldsymbol{R}). \tag{2.8}$$

ここで注意すべきことは，(2.7) や (2.8) の左辺は，粒子数を保存する（ゲージ対称な）系でのカノニカル平均（系のハミルトニアンを $\mathcal{H}$ とするとき，$\exp(-\beta\mathcal{H}) = \exp(-\mathcal{H}/k_{\mathrm{B}}T)$ に比例した重

みでとる平均）であるから，体系が有限であっても定義されることである．それに対して，(2.7) や (2.8) の右辺の $\Psi_1(\boldsymbol{R})$ や $\Psi_2(\boldsymbol{R})$ は，自発的対称性が破れた状態での巨視的な「波動関数」(より適切には，秩序パラメータ) である．すなわち，巨視的な量子状態 $|\Psi_1(\boldsymbol{R})\rangle$ や $|\Psi_2(\boldsymbol{R})\rangle$ における $\psi(\boldsymbol{R})$ や $\psi_2(\boldsymbol{R})$ の期待値が $\Psi_1(\boldsymbol{R})$, $\Psi_2(\boldsymbol{R})$ である：

$$\begin{aligned}\Psi_1(\boldsymbol{R}) &= \langle\Psi_1(\boldsymbol{R})|\psi(\boldsymbol{R})|\Psi_1(\boldsymbol{R})\rangle,\\ \Psi_2(\boldsymbol{R}) &= \langle\Psi_2(\boldsymbol{R})|\psi_2(\boldsymbol{R})|\Psi_2(\boldsymbol{R})\rangle.\end{aligned} \tag{2.9}$$

ここで，$\Psi_1(\boldsymbol{R})$ や $\Psi_2(\boldsymbol{R})$ は複素数であり，

$$\begin{aligned}\Psi_1(\boldsymbol{R}) &= |\Psi_1(\boldsymbol{R})|\mathrm{e}^{i\varphi_1(R)},\\ \Psi_2(\boldsymbol{R}) &= |\Psi_2(\boldsymbol{R})|\mathrm{e}^{i\varphi_2(R)}\end{aligned} \tag{2.10}$$

のように位相 $\varphi_1(R)$, $\varphi_2(R)$ を用いて書ける．一様な系では，これらの位相は場所 $\boldsymbol{R}$ によらない．位相 $\varphi(\boldsymbol{R})$ が場所 $\boldsymbol{R}$ によるときは，位相差 ($\nabla\varphi$ また $\Delta\varphi\equiv\varphi_1-\varphi_2$) による粒子の流れが起こる．その流れの強さ $\boldsymbol{J}_s$ は $\nabla\varphi(\boldsymbol{R})$ または $\sin(\Delta\varphi)$ に比例する[12]：

$$\boldsymbol{J}_s \propto \hbar\nabla\varphi(\boldsymbol{R}) \text{ または } \hbar\sin(\Delta\varphi). \tag{2.11}$$

比例定数はプランク定数 $\hbar$ に依存し，$\hbar\to 0$ で零になる量なので，それを示すために $\hbar$ を顕わに書いたが，残りの因子にも，$\hbar$ が (陰に陽に) 入ってくることがある．

少なくとも，$\hbar$ の 1 次の因子が (2.11) に現れることは，波動関数 $\psi(\boldsymbol{R},t)$ がシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{R},t)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+u(\boldsymbol{R})\right)\psi(\boldsymbol{R},t) \tag{2.12}$$

に従う場合の粒子の存在確率の流れ $\boldsymbol{J}$ が

$$\boldsymbol{J}=\frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla\psi-(\nabla\psi)^*\psi) \tag{2.13}$$

であることから[14]，頷ける．実際の巨視的量子状態を表す秩序パラメータ $\Psi_1(\boldsymbol{R})$ や $\Psi_2(\boldsymbol{R})$ は，(2.12) のシュレーディンガー方程式ではなく，類似ではあるが，有効質量 m^* などを含む現象論的な方程式 (例えば GL (ギンツブルグ-ランダウ) 方程式など) に従う[15,16]．いずれにしても，プランク定数 $\hbar$ が現れ，この現象が量子現象であることを表している．後で詳しく述べるように，2 つの超伝導体 (位相がそれぞれ φ_1 と φ_2 とする) を薄い絶縁体で接触させると，両端に電圧をかけなくとも，$\sin(\varphi_1-\varphi_2)$ に比例した直流電流が流れる．これがジョセフソン効果である[17,18]．

3. ボース・アインシュタイン凝縮

よく知られているように，相互作用のない理想ボース系で巨視的量子現象，すなわちコヒーレントな量子状態が低温では現れる．これはボース・アインシュタイン凝縮 (略して BEC) と呼ばれ，量子現象の中で最も基本的な現象である．基底状態にマクロに粒子が凝縮しているので，位相が揃った巨視的な量子コヒーレント状態である．この現象が起こるメカニズムはボース統計によって説明される．1 粒子のエネルギー ε の状態にボース粒子が存在する確率 $f_\mathrm{B}(\varepsilon)$ が

$$f_\mathrm{B}(\varepsilon)=\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1}\quad;\beta=\frac{1}{k_\mathrm{B}T} \tag{3.1}$$

で与えられ，粒子数 N は $N=\sum_j f_\mathrm{B}(\varepsilon_j)$ という条件で決まるが，たとえ化学ポテンシャル μ を $\mu=0$ にしても，和を積分 $Vb\int_0^\infty f_\mathrm{B}(\varepsilon)\varepsilon^{1/2}\,d\varepsilon$ に表した量が有限になり，低温では与えられた数密度 N/V の粒子を $\varepsilon>0$ の状態に受け入れることはできなくなる (状態密度を $b\varepsilon^{1/2}$ とおいた)．したがって，ボース粒子は $\varepsilon=0$ の状態にマクロに入ることになる．ただし，V は系の体積である．この BEC の起こる相転移点 T_c の $\hbar$ と $\rho\equiv N/V$ の依存性は次のようにして容易にわかる．1 粒子のエネルギー ε_p (運動量依存性) を一般に $\varepsilon_p=ap^k$ とし[4]，体系の次元を d とすると，物理量 Q の次元を $[Q]$ と表して，

$$[kT_\mathrm{c}]=[\varepsilon_p]=[ap^k]=[a][\hbar L^{-1}]^k \tag{3.2}$$

となる．ただし，L は長さの次元で $V=L^d$ である．ここで，プランク定数 $\hbar$ の次元は $[\hbar]=$ [エネルギー] × [時間] であることを用いると，相

転移点 T_c は

$$T_\mathrm{c} \propto a\hbar^k \rho^{k/d}/k_\mathrm{B} \tag{3.3}$$

のように $\hbar^k$ に比例することがわかる[4]．通常の 3 次元 BEC では $k=2, d=3$ より，$T_\mathrm{c} \propto \hbar^2\rho^{2/3}$ となり, $\hbar$ の 2 乗に比例して T_c は零になる．BEC が典型的なマクロな量子現象であることがわかる．斥力相互作用によって T_c がどのように変化するかの研究も最近行われている[19]．

基底状態（$\varepsilon_p = 0$ の状態）にマクロに凝縮した状態では，C.N. ヤングの ODLRO が存在する ((2.7) 参照)．この事実を用いると，BEC の状態では，循環（すなわち，粒子の速度場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ をある閉曲線 C に沿って積分した量 $\Gamma = \int \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s}$）は量子化される：

$$\Gamma = \frac{2\pi\hbar}{m} \times n \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{3.4}$$

であることが厳密に導かれる[20]．ただし，m はボース粒子の質量である．通常の議論では，超流動の速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ が波動関数の位相 $\theta(\boldsymbol{r})$ を用いて，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (\hbar/m)\nabla\theta(\boldsymbol{r})$ と表されることと波動関数の一価性から (3.4) が導かれるが，文献 20) では，理論のゲージ不変性と ODLRO の存在とから (3.4) が導かれるので，より一般的であり厳密な取扱いであるということができる．

4. 超伝導とジョセフソン効果

通常の超伝導では，電子と格子との引力の相互作用によりスピン上向き，波数 k の電子とスピンが下向き，波数 $-k$ の電子が対になってクーパー対を作る[21]．これらは，有効的にボース粒子のように振る舞うので，一種の BEC が起こり，コヒーレントな量子状態が現れる．その状態を特徴づける物理量は (2.8) で定義される ODLRO である．クーパー対が凝縮したコヒーレントな状態では，前にも説明した通り粒子数は一定ではなくなり，位相が揃う．したがって，位相の異なる 2 つの超伝導体を接触させると両端に電位差が無くとも電流が流れる．これがジョセフソン効果である[22]．このメカニズムをファインマン[17]に従って簡単に説明すると次のようになる．ジョセフソン接合の両側の物質は同じもので，電圧 V 以外は左右対称になっているとする．電界ポテンシャルエネルギーの原点を接合の中間点にとり，クーパー対の電荷 $q = 2e$ であることを用いると，接合の左右の超伝導体を特徴づけるクーパー対の波動関数 ψ_1 と ψ_2 は次の方程式に従って時間変化すると考えてよい：

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t} &= eV\psi_1 + K\psi_2, \\ i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t} &= -eV\psi_2 + K\psi_1. \end{aligned} \tag{4.1}$$

ただし，左辺第 2 項は左右の波動関数の重なり K に基づいて起こるトンネル効果を生む相互作用である．そこで，

$$\psi_1 = \sqrt{\rho_1}\mathrm{e}^{i\theta_1}, \quad \psi_2 = \sqrt{\rho_2}\mathrm{e}^{i\theta_2} \tag{4.2}$$

とおいて，接合間に流れるトンネル電流を求めてみる：

$$\begin{aligned} J &= (2e)\frac{\partial}{\partial t}(\psi_1^*\psi_1) \\ &= \frac{2e}{i\hbar}\left(i\hbar\frac{\partial\psi_1^*}{\partial t}\psi_1 + \psi_1^*\cdot i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right) \\ &= \frac{2eK}{i\hbar}(\psi_1^*\psi_2 - \psi_2^*\psi_1) \\ &= \frac{4eK}{\hbar}\sqrt{\rho_1\rho_2}\sin\delta \quad ; \delta = \theta_2 - \theta_1. \end{aligned} \tag{4.3}$$

したがって, $V = 0$ でも, 位相差 $\delta = \theta_2 - \theta_1$ の存在によって電流が流れることがわかる．次に，電圧 V がかかっていると，位相が変化する効果を取り込まなければならない．このとき，位相の時間変化に比べて密度の時間変化はゆっくりであると考え，(4.1) の実数部分をとると，

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt} &= -\frac{K}{\hbar}\cos\delta - \frac{eV}{\hbar}, \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= -\frac{K}{\hbar}\cos\delta + \frac{eV}{\hbar} \end{aligned} \tag{4.4}$$

となる．したがって，位相差 δ の時間変化は，

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\theta_2}{dt} - \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{2eV}{\hbar} \tag{4.5}$$

となり，

$$\delta(t) = \delta_0 + \frac{2eV}{\hbar}t. \tag{4.6}$$

よって，電圧 V がかかったジョセフソン接合では，

$$J(t) = \frac{4eK}{\hbar}\sqrt{\rho_1\rho_2}\sin\left(\frac{2eV}{\hbar}t + \delta_0\right) \tag{4.7}$$

のように交流が流れることになる．しかも，その周波数はプランク定数 $\hbar$ に逆比例する．

次に磁場がかかったときの量子効果，すなわち磁束の量子化について議論してみよう．超伝導の大きな特徴の一つにマイスナー効果がある[16)]．これは，超伝導体内部（表面から侵入度までを除いて）では至るところ磁場が零（完全反磁性）であることを表している．しかし，超伝導体でリング（環）を作ると，そのリングの中空（穴）の所には磁場が入り得る．ひとたび穴の中に磁場が入り，リングが超伝導状態になると，その磁場は時間が経っても減少せず捉えられたままになる．それは，ファラディーの法則により，磁束が変化するとその周りに電界が生じることになるが，それは超伝導体中では禁止されているからである．それではその磁束はどのような値でも許されるのであろうか．驚くべきことに，それは量子化されているのである．すなわち，磁束 Φ は

$$\Phi = \frac{2\pi\hbar}{q} \times n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots; q = 2e) \tag{4.8}$$

のようにとびとびの値しかとることができない．その理由は次のように説明できる[17)]．超伝導体の秩序パラメータの位相を θ，密度を ρ とすると，前に述べた通り，電流 $\boldsymbol{J}$ は

$$\boldsymbol{J} = \frac{\rho q\hbar}{m}\nabla\theta \tag{4.9}$$

と表される．磁場があると，そのベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ （$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$）を用いて $\boldsymbol{J}$ はゲージ不変な形

$$\boldsymbol{J} = \frac{\rho q\hbar}{m}\left(\nabla\theta - \frac{q}{\hbar}\boldsymbol{A}\right) \tag{4.10}$$

で表される．超伝導体内では，$\boldsymbol{J} = 0$ であるから，$\nabla\theta = (q/\hbar)\boldsymbol{A}$ の関係が成り立つ．この式の両辺をリング C に沿って一周積分すると，ストークスの定理[23)]を用いて

$$\Phi = \oint \boldsymbol{A}_n\,dS = \int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} = \frac{\hbar}{q}\int_C(\nabla\theta)\cdot d\boldsymbol{s}$$
$$= \frac{\hbar}{q}(\theta_2 - \theta_1) \quad ;\theta_2 = 1\text{ 周後の位相} \tag{4.11}$$

となる．単連結領域では位相 θ は 1 価関数であるから $\theta_2 = \theta_1$ となり，$\Phi = 0$ となる．これがマイスナー効果である．リングのように単連結領域でないときには，位相は必ずしも 1 価である必要はなく，波動関数の 1 価性より，$\theta_2 = \theta_1 + 2\pi n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ の関係にあればよい．したがって，磁束 Φ は

$$\Phi = \frac{2\pi\hbar}{q}\cdot n \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{4.12}$$

と量子化される．これは実際に観測されており[24)]，磁場の強さを精度よく測定するのに広く応用されている．

5. 磁性体におけるジョセフソン的効果

ジョセフソン効果の本質は巨視的なコヒーレンス（位相の揃った状態）にあるので，同様の現象は超流動でも理論的には期待される[16)]．しかし，電荷を持たない系の流れを精度よく観測するのは困難である．

ここでは，磁性体での可能性[25)]について簡単にふれることにする．マグノンが BEC を起こし，コヒーレント状態にあるとみなすことが許されるならば，前節と同様にして，超伝導におけるジョセフソン効果と類似の巨視的トンネル現象が磁性体接合において起こると期待される．しかも，この場合には，両側の強磁性体のスピンの相対的な向きに依存して様々な現象が起こり得る．詳しくは文献 25) を参照して頂きたい．

6. アハーロノフ・ボーム効果[24, 26)]

電子ビームが 2 つの等距離の経路に分かれてから再び 1 点で出会う状況を考える．このとき，2

つのビームの位相は等しいはずである．しかし，2 つの経路に囲まれた領域に（経路にはふれないように）磁場をかけると，驚くべきことに結果は変わる．これは，最初にアハーロノフとボームによって理論的に予言され，最近，外村[24]らによって実験的に検証された．これは次のように説明される．磁束 Φ が中央に存在すると，その周囲にはベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が存在することになる．2 つのビームの位相差 $\Delta\theta$ は

$$\Delta\theta = \frac{e}{\hbar}\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} = \frac{e}{\hbar}\Phi \qquad (6.1)$$

で与えられ，磁束 Φ に比例する．こうして，2 つのビームには磁場による干渉効果が現れる[24,26]．

7. 近藤効果[27~29]

今まで，「第 2 種の巨視的量子現象」の例をいくつか解説したが，ここで「第 1 種の巨視的量子現象」の極めて興味深い例をあげたい．それは，近藤効果である．これは，磁気不純物の入った金属の抵抗極小現象を説明する量子論である．伝導電子と不純物のスピンとの交換相互作用，いわゆる s–d 相互作用による量子効果として電気抵抗が温度 T の対数に依存して低温で大きくなることが近藤によって第 2 ボルン近似で示された[27]．この異常性は，スピンの非可換性から現れる量子効果であり，しかも，伝導電子の系がフェルミ面を持っていることに由来し，パウリ原理も本質的に効いている典型的な量子現象である．不純物は 1 個でもこの効果は現れるので，「第 2 種の量子現象」（多体効果による自発的対称性の破れ）とは質的に異なる．この効果は不純物の濃度に比例するので，巨視的現象として観測される．それが抵抗極小現象である．より詳しくは近藤氏らの解説を参照されたい[27~30]．

ついでながら，筆者[31]は最近，**無限系でのメゾスコピック現象**の一般的な取扱い，すなわち，統計力学的理論を作りつつある．具体的には，磁性体で有限領域（例えば 1 点）に磁場をかけたときどのような現象が起こるかを調べてみると，相転移点以下では大変興味深いことの起こることが示せる[31]．すなわち，系全体の磁化の強さは通常の自発磁化の 2 乗に比例することが厳密に示せる．このように局所的な摂動（外場）に対して，非局所的（メゾスコピックないしマクロスコピック）な効果が現れるのは，系全体に何らかの際立った特徴（縮退，コヒーレンス，対称性の破れ，ODLRO，C^* 代数における凸状態の存在，フェルミ面の存在など）があるためである．これは，いろいろな現象に深く関わる新しい研究領域であるように思われる．近藤効果はすでによく研究し尽くされているが，筆者のような立場から見ると，それはまた新しい興味が湧いてくる現象である．詳しくは，筆者の論文を参照して頂きたい[31]．

8. 量子相転移

「第 2 種の量子現象」は量子相転移であると言ってもよいが，この節で敢えて，「量子相転移」として取り上げたのは，絶対零度でのパラメータに関する相転移は特に興味を持たれており，その大部分は量子現象であり，いろいろと興味深い側面があるからである．

その一つは，温度 $T = 0$ での量子相転移と等価な「古典的な相転移（$T > 0$ での相転移）」との等価性[32~34]が成立する場合が多く存在することである．これは，いわゆる Suzuki–Trotter 変換により，d 次元量子系（短距離相互作用）を $(d+1)$ 次元古典系（短距離相互作用）にマップするという一般的な方法により示される．例えば，1 次元トランスバースイジング模型の $T = 0$ での量子相転移の異常性は 2 次元イジング模型の $T \neq 0$ での臨界現象と等価である[35,36]．

また，量子的臨界現象と古典的臨界現象とのクロスオーバー[37]という興味深い側面もあるが，ここでは立ち入らないことにする．

9. 結び

他にも，量子ホール効果[38]，量子コンピュー

タ[39~41]など取りあげるべきトピックスも多いが，紙数が尽きたので，この辺で筆をおく．

参考文献

1) 2000 年 12 月にベルリンで開催された「量子論発見百周年記念シンポジューム」のプロシーデングス，*Ann. der Phys.* **9**, Nos.11–12 (2000), and **10**, Nos.1–2 (2001)（日本からの参加者が筆者一人であったのは淋しい限りであった）．
2) 高田誠二，『プランク』（清水書院，1991）．
3) 河原林研，『量子力学』（現代物理学叢書，岩波書店，2000）．
4) 鈴木増雄，『統計力学』（現代物理学叢書，岩波書店，2000）．
5) J. Schwinger, in 「Evolutionary Trends in the Physical Sciences」(Springer Proceedings in Physics **57**, eds. M. Suzuki and R. Kubo, (Springer–Verlag, 1991).
6) 鈴木増雄, 文献 5) の本の筆者のレビュー「New Trends in Physics of Phase Transitions」参照．
7) 鈴木増雄，『相転移の超有効場理論とコヒーレント異常法』，物理学最前線 **29**（共立出版，1992）．
8) 中野藤生，木村初男，『相転移の熱統計力学』，（朝倉書店，1988）．
9) 川崎恭治，『非平衡と相転移』，（朝倉書店，2000）．
10) 鈴木増雄，「スピン系のエキゾティックな秩序」，『物性物理の新概念』（福山秀敏編，培風館，1988 年）の第 1 章．
11) 江沢洋，渡辺敬二，鈴木増雄，田崎晴明，『くり込み群の方法』，現代物理学叢書（岩波書店，2000）．
12) P.W. Anderson,「Basic Notions of Condensed Matter Physics」, (The Benjamin, 1984).
13) C.N. Yang, *Rev. Mod. Phys.* **34** (1962) 694.
14) 矢吹治一，『量子論における位相』，数理物理シリーズ，（日本評論社，1998）．
15) 高木伸，『巨視的トンネル現象』新物理学選書，（岩波書店，1997）．
16) 恒藤敏彦，『超伝導・超流動』，物理学叢書，（岩波書店，2000）．
17) ファインマン，レイトン，サンズ，『ファインマン物理学 V：量子力学』（砂川重信訳，岩波書店，1978）．
18) 上田正仁，「エキゾチックな量子の世界」数理科学 2002 年 11 月号（サイエンス社）．
19) H. Suzuki and M. Suzuki, *Int. J. Mod. Phys.* **B15** No.17 (2001) 2335 および引用文献．
20) G. Su and M. Suzuki, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 2708.
21) J. Bardeen, L.N. Cooper and J.R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108** (1957) 1175.
22) B.D. Josephson, *Phys. Lett.* **1** (1962) 251. Nobel Lecture, *Rev. Mod. Phys.* **46** (1974) 250.
23) 鈴木増雄，香取眞理，羽田野直道，野々村禎彦訳『科学技術者のための数学ハンドブック』（朝倉書店，2002）．
24) A. Tonomura,「The Quantum World Unveiled by Electron Waves」(World Scientific, 1998).
25) G. Su and M. Suzuki, *Int. J. Mod. Phys.* **B16**, No.19 (2002) 711.
26) M. Peshkin and A. Tonomura, 「The Aharanov·Bhom Effect」(Lecture Notes in Physics **340**) (Springer-Verlag 1989).
27) 近藤淳，『金属電子論』（裳華房，物理学選書 16，1983 年）．J. Kondo, *Prog. Theor. Phys.* **32** (1964) 37.
28) 斯波弘行，『固体の電子論』（パリティ物理学コース，丸善，1996 年）．
29) 永長直人，『物性論における場の量子論』（岩波書店，1995 年）．
30) 川上則雄・梁成吉，『共形場理論と 1 次元量子系』（岩波書店，1997）．
31) M. Suzuki, *J. Phys. Soc. Jpn.* **69** (2000) Suppl. A. pp.156, および準備中（2003 年 日本物理学会年次大会領域 11 の概要集）．
32) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **56** (1976) 1454.
33) 鈴木増雄，鈴木公，鈴木彰訳，『現代物理学ハンドブック』（朝倉書店，2003）．
34) 大貫義郎，鈴木増雄，柏太郎『経路積分の方法』（現代物理学叢書，岩波書店，2000）．
35) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **46** (1971) 1337.
36) B.K. Chakrabarti, A. Dutta and P. Sen, 「Quantum Ising Phases and Transitions in Transverse Ising Models」(Springer, 1996).
37) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **56** (1976) 1007.
38) 長岡洋介，安藤恒也，高山一，『局在・量子ホール効果・密度波』（岩波現代物理学叢書，岩波書店，2000）．
39) 『数理科学』の特集「量子情報と量子コンピュータ」（2001 年 6 月号）．
40) 大矢雅則，「量子コンピュータの数理」（パリティ物理学，クローズアップ）丸善，1999 年．
41) 文献 33) の補章．

（すずき・ますお，東京理科大学理学部）

場の理論と $\hbar$

亀淵 迪

1. 場一元論

場は当初，古典物理学において，力の伝播を担う媒体として導入された．物体の周りには場が惹起され，その変化は近接点での場を次々と変化させ，それが有限距離だけ離れた他の物体に伝えられる．この場合，力はつねに隣接した諸点間で授受されるので，近接作用と呼ばれている．プリンキピアによれば，力とは本来接触力のことであり，場はこの意味でニュートンの考え方に沿った概念であったと言える．場の時空的変化が質点系の力学の拡張として取り扱えるのも，こうした事情による．実際，近接作用と対比される遠隔作用を採ると，その力学は極めて複雑な形となる．

場を量子論的に取り扱う，いわゆる場の量子論に移ると，さらに新しい眺望が開ける．固有値スペクトルが，$0, 1, 2, \cdots$ となるような演算子 N が定義され，自由場に対しては，場の全エネルギー，全運動量その他が，N を単位として書き表される．ところで上記の固有値は，ものの個数と同じであるから，この N のことを場の量子，あるいは粒子の個数であると解釈できる．このとき各粒子は，それぞれに質量，エネルギー，運動量，…をもつとしてよい．一つの場から出来する粒子は，すべて同一の質量，スピン，電荷，…をもつ，いわゆる同種粒子である．このようにして量子論的に見た場，すなわち量子場は，物質粒子を記述する機能をも備えることになる．

古典物理学においては，物体——その特殊の場合として粒子——と場とは，互いに相対立した存在であったが，量子物理学に移ると，この対立は解消し，場は物体およびそれら相互間の力をも記述し得ることになる．このようにして，場の一元論が成立する．昔，原子論に対する批判として，“木の葉にも全く同じ形をしたものは 2 枚とない．全く同じ性質をもった原子が多数個存在するとした原子論は，この意味で極めて不自然な考え方である”と責められたことがある．場の量子論はこうした批判を斥けるものであり，古代ギリシャ以来の原子論に，初めて強固な理論的基礎を与えることとなった．

本稿での場とは，したがって，物質場を意味し，対応する波動は現実の物理的空間における実在波である．この点で，例えばシュレーディンガーの確率振幅とは，概念的にその質を異にする．

以下では，プランク定数 $\hbar(= h/2\pi)$ が場の量子論構成の各段階で，どのような役割を果たすかを中心に考察を進める．量子場の特質の多くは，すでに非相対論的な場においても現れるので，比較的取扱いの簡単なこの場合について詳論し，相対論的な場合については，最終節で，二三の注意を与えるに止める．

2. ガリレイ変換

相対論におけるローレンツ不変性に対応する基本的対称性として，非相対論においてはガリレイ不変性がある．そこで，議論をガリレイ変換に関する考察から始める．

2.1 第 5 座標の導入

まず，1 個の自由粒子（質量 m）の古典力学を考えよう．運動方程式 $\ddot{\vec{x}} = 0$ は，次の座標変換（群）G_4 の下で不変である：

$$\vec{x} \to \vec{x}' + R\vec{x} - \vec{v}t + \vec{a}, \quad t \to t' = t + b. \tag{1}$$

ここに R は 3×3 の定数よりなる直交行列，$\vec{v}, \vec{a}, b$ はそれぞれ定数ベクトルまたは定数とする．変換 (1) は

通常ガリレイ変換と呼ばれている*1)．しかし，この式を導くラグランジアン $L=m\dot{\vec{x}}^2/2$ は，上記 G_4 の下で不変とはならない：

$$\begin{aligned} L \to L' = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}'^2 = L + m\dot{f}, \\ f \equiv -(R\vec{x})\cdot\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{v}^2 t + \text{const.} \end{aligned} \tag{2}$$

これは，相対論的なラグランジアンがローレンツ不変であるのと，極めて対蹠的な状況である．$\dot{f}$ の効果を除くためには，改めて正準変換（あるいは位相変換）を行う必要がある．何れにせよ，この効果は，一般に方程式系の明白な共変性を損なう．

こうした不都合を避けるために，新座標 s を導入し，L の代りに $\tilde{L} \equiv L - m\dot{s}$ を採り，$(\vec{x},t)$ に対する変換 (1) とともに，s が

$$s \to s' = s + f \tag{3}$$

として変換すると考える．このとき，$\tilde{L}$ は明らかに不変となる．$(\vec{x},t,s)$ に対する変換（群）を G_5 と呼ぼう．因みに群 G_5 は G_4 の中心拡大となっている．

いま次元を揃えるために，速度の次元をもつ正定数を u とし，$x^4 \equiv ut, x^5 \equiv s/u$ とすれば，変換 G_5 は

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + \alpha^{\mu} \tag{4}$$

の形に書かれる．斉次変換 $(\alpha^{\mu}=0)$ の下では $\eta_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}$ が不変となる．ただし $\eta_{ii} = 1 (i=1,2,3), \eta_{45} = \eta_{54} = -1$，他の要素 $=0$ とする．ここで $x_{\pm} \equiv (x^4 \pm x^5)/2$ を導入すれば，$\eta_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} = \vec{x}^2 + x_-^2 - x_+^2$ となる．したがって斉次変換 G_5 は，5 次元ローレンツ群の，x^4 を不変にするような部分群に他ならない．

2.2 G_5 共変性

そこで非相対論的場の理論の定式化にあたっては，変換 G_5 の下での共変性を要請することにしたい．たんに一自由粒子に対して見出された性質を，一般の場合にまで拡張して要請するのは，いささか軽率に見えるかもしれない．しかし，アインシュタインが相対論全般の基礎としたローレンツ不変性も，元はと言えば電磁場に対する考察から生まれたのであった．ここでも同様に考えたいのである．実際，ある性質が真に基本的であるならば，それは如何なる対象においても具現されるべきであろう[2]．

変換 G_5 がローレンツ変換に類似であるので，理論の形式的展開は，相対論的な場合に模して行うことができる．ただしここでは，第 5 座標 s の物理的解釈の問題がある．非相対論的現象の記述には，座標 $(\vec{x},t)$ でこと足りているので，理論の最終結果において，s の効果は消失しているべきである．このため以下では，理論に一つの束縛条件を課す．

余分な要素を理論に導入し，またそれを除くということは，徒にことを面倒にするだけと思われるかもしれない．しかし同じことは，実際ゲージ理論でもよく行われている．理論のローレンツ共変性を重要視するので，はじめに必要以上の成分をもつゲージ場を導入し，後にゲージ条件を課して，必要な成分のみを取り出している．

3. 場の方程式

非相対論的な場が，どのような方程式を満たすべきかを，G_5 共変性を基に決定する．すでに述べたように，具体的作業は相対論の場合と同様に行える[2]．

3.1 スピン 0 の場

相対論的スカラー場のクライン・ゴルドン方程式に倣い，G_5 変換の下でのスカラー量 $\phi(x)$（ただし x は x^{μ}；$\mu = 1,2,\cdots,5$ を代表）に対して

$$\eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi(x) = 0 \tag{5}$$

を仮定しよう．ここに $\partial_{\mu} \equiv \partial/\partial x^{\mu}, \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$．また第 5 座標 x^5 に関する束縛条件としては，κ を正の実定数として

$$(\partial_5 + iu\kappa)\phi(x) = u(\partial_s + i\kappa)\phi(x) = 0 \tag{6}$$

をおくことにする．(5) 式の G_5 不変性は明白であり，他方 $\partial_5' = \partial_5$ であるので，(6) 式もまた G_5 不変である．

(6) 式より $\phi(x) \equiv \exp(-i\kappa s)\psi(\vec{x},t)$ とおくと，$\psi(\vec{x},t)$ に対しては

$$i\dot{\psi} = -\frac{\triangle}{2\kappa}\psi$$

が成り立つ．ここでもし $\kappa = m/\hbar$ とおくならば，上式はよく見馴れた形となる：

$$i\hbar\dot{\psi}(\vec{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi(\vec{x},t) \equiv \mathcal{H}_0\psi(\vec{x},t). \tag{7}$$

*1) ガリレオ・ガリレイは『天文対話』の中で，「船内にて起こる力学現象の観察のみからは，船が静止しているのか，静かに動いているかの識別はできない」と述べている[1]．力学現象の G_4 不変性に気付いたのは，おそらく彼が最初であったろう．

この形の式を，以後 S 型方程式と呼ぼう[*2]．

いま G_5 変換後の量を $\phi'(x')$ と書くと，$\phi'(x') = \phi(x)$ であり，上と同様に $\phi'(x') = \exp(-i\kappa s')\psi(\vec{x}', t')$ とおけば

$$\begin{aligned}\psi'(\vec{x}', t') &= \exp[i\kappa(s'-s)]\psi(\vec{x}, t) \\ &= \exp[i\kappa f(\vec{x}, t)]\psi(\vec{x}, t)\end{aligned}$$

が得られる．$\psi(\vec{x}, t)$ に基づく通常の定式化において，G_4 共変性が見難いのは，上記の位相因子の出現による．数学的には，$\phi(x)$ が群 G_5 のベクトル表現であるのに対し，$\psi(\vec{x}, t)$ は群 G_4 の射影表現になっている．

3.2 スピン 1/2 の場

この場合も，相対論的なディラック方程式に倣い，次式を仮定する：

$$\gamma^\mu \partial_\mu \chi(x) = 0, \quad \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}. \tag{8}$$

変換 G_5 の下で $\chi(x)$ は $\chi'(x') = T\chi(x)$ として変換し，行列 T が $T^{-1}\gamma^\mu T = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$ を満たすとすれば，(8) 式の G_5 共変性が示される．また束縛条件としては，(6) 式と同じく $(\partial_s + i\kappa)\chi(x) = 0$ を採る．行列 $\gamma^\mu (\mu = 1, 2, \cdots, 5)$ は 5 次元クリフォード代数であり，2 種類の同値でない既約表現がある．しかしその何れを採っても，物理的結果に本質的な相違を生じないので，ここでは次の表現を用いる：

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}, \gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

ここに $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$ は 2×2 のパウリ行列，$0, \sqrt{2}$ はそれぞれ $0I_2, \sqrt{2}I_2$ （I_2 は 2×2 の単位行列）を表す．

結局，$\chi(x)$ は 4 成分スピノルとなるから，これを

$$\chi(x) = \exp(-i\kappa s) \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{x}, t) \\ \psi_2(\vec{x}, t) \end{pmatrix} \tag{10}$$

と書こう．ここで ψ_1, ψ_2 はそれぞれ 2 成分スピノルである．(8) の第 1 式に (10) 式を代入し，(9) 式および束縛条件を用いれば，ψ_2 は ψ_1 で表され，独立成分の ψ_1 に対しては，(7) 式と同じ S 型方程式 $i\hbar\dot{\psi}_1 = \mathcal{H}_0\psi_1$ が得られる．

なおスピン S が 1 以上の場に対しては，対称多重スピノル $\chi_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}(x) (n = 2S)$ を用い，これに対してバーグマン・ウィグナー型の方程式を仮定すればよい．

3.3 S 型方程式と $\hbar$

上で得た ψ や ψ_1 に対する方程式は，群 G_5 の表現の満たす式であり，古典場に対しても量子場に対しても斉しく成り立つべきものである．いまそれが前者に対する式であるとしても，定数 κ に対して $\kappa \to m/\hbar$ なる置き換えを行えば，出来する式は S 型方程式であり，量子論への移行に便利な形をとる．このような，定数 κ の m と $\hbar$ へのダイコトミックな分解は，プランクの $E \to \hbar\omega$ と同類である．この $\hbar$ と量子論固有の $\hbar$ との関連については次節で述べる．

なお，ψ や ψ_1 は S 型方程式を満たすが，これらはあくまでも物質場の量であり，量子論に移行した際にも，シュレーディンガーの波動関数（確率振幅）とは峻別されねばならない．

4. 場の量子条件

表題の意味は，場 ψ や ψ_1 が量子場である場合に特に満たすべき条件のことである．以下では簡単のため，スカラー場に対する $\psi(\vec{x}, t)$ について考察する．

4.1 量子力学の形式

古典力学を正準形式に書くとき，物理量 $A(q, p)$ の運動方程式は $\dot{A} = \{A, H\}$ で与えられる．ここに $H = H(q, p)$ は系のハミルトニアンであり，$\{A, B\}$ はポアソン括弧を表す．後者には特徴的な代数関係がある[*3]．

いま，これとは別種の括弧 $\{A, B\}'$ が定義され，これが $\{A, B\}$ の場合と同じ代数関係を満たすとき，新しい（あるいは新しい形式での）力学が導入される：$\dot{A} = \{A, H\}'$．演算 $\{\cdot, H\}'$ は $d/dt\cdot$ と同じ形式的性質をもつからである．ディラックが初めて指摘したように，ハイゼンベルク括弧 $[A, B]/(i\hbar)$ は上記の性質をもつ．ここに $[A, B] \equiv AB - BA$ とする．この括弧に基づく力学が量子力学であり，$i\hbar\dot{A} = [A, H]$ はハイゼンベルクの運動方程式と呼ばれている．

因みに，$\{A, B\}$ や $[A, B]$ 以外で同じ代数関係をもつ，いくつかの $\{A, B\}'$ が知られている．

*2) S 型方程式を満たす量の物理的意味が確率振幅であるときにのみ，これをシュレーディンガー方程式と呼ぶ．

*3) $\{A, B\} = -\{B, A\}, \{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\}$, $\{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\}$, $\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$.

4.2 量子場の交換関係

以後，前節で導入された $\hbar$ をハイゼンベルク括弧における $\hbar$ と同一視する．このとき $\psi(\vec{x},t)$ に対するハイゼンベルクの運動方程式と (7) 式より

$$[\psi(\vec{x},t),H] = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi(\vec{x},t) \tag{11}$$

が得られる．場 ψ に対するハミルトニアンとしては，古典的表式を対称化または反対称化した表式

$$H = \frac{\hbar^2}{4m}\int d^3x\,[\vec{\nabla}\psi^\dagger(\vec{x},t),\vec{\nabla}\psi(\vec{x},t)]_\pm \tag{12}$$

を採ることにする．ただし $[A,B]_\pm \equiv AB \pm BA$ を表す．(11) 式，(12) 式は演算子 $\psi(\vec{x},t)$ に対する代数的制約を与える．

周知のように，同時（反）交換関係

$$\begin{aligned}&[\psi(\vec{x},t),\psi^\dagger(\vec{x}',t)]_\mp = \delta(\vec{x}-\vec{x}'),\\&[\psi(\vec{x},t),\psi(\vec{x}',t)]_\mp = [\psi^\dagger(\vec{x},t),\psi^\dagger(\vec{x}',t)]_\mp = 0\end{aligned} \tag{13}$$

は，上記制約を満たすもっとも簡単な解である．ただし (12) 式，(13) 式に現れる複号は，すべて同順とする．複号の上下に対応して，それぞれボーズ量子化，フェルミ量子化が出来する．なお一般に p 次 $(p=1,2,\cdots)$ のパラボーズ量子化またはパラフェルミ量子化も可能であり，$p=1$ の場合が (13) 式の量子化に対応する[3]．

5. 物質の二重性

これまでは，場が相互作用をもたない，いわゆる自由場の場合を取り扱ってきたが，以下では場が外場 $V(\vec{x})$ の中にあると考える．このとき場 ψ の満たす方程式は

$$\begin{aligned}i\hbar\dot{\psi}(\vec{x},t) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle + V(\vec{x})\right)\psi(\vec{x},t)\\&\equiv \mathcal{H}\psi(\vec{x},t)\end{aligned} \tag{14}$$

となる．ここに $V(\vec{x}) = V^*(\vec{x})$ は ψ や $\psi^\dagger$ を含まない $\vec{x}$ のみの関数であり，一般には系の G_4 不変性を破る．(14) 式を S 型方程式の一般形とする．

5.1 波動性

ψ の時空的振舞いは (14) 式によって規定され，物質波 ψ は物理的空間を波動として伝播する．ψ が古典場であれば，このことは自明である．ψ が量子場のときには，ψ の代りにその固有値を考えれば分かりやすい．いま ψ をボーズ（量子化された）場とし，$\chi(\vec{x},t)$ を ψ と同一の S 型方程式 $i\hbar\dot{\chi}(\vec{x},t) = \mathcal{H}\chi(\vec{x},t)$ を満たす，適当な c 数解としよう．このとき状態

$$|\chi\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\|\chi\|^2\right)\exp(\psi,\chi)|0\rangle \tag{15}$$

は，固有値方程式 $\psi(\vec{x},t)|\chi\rangle = \chi(\vec{x},t)|\chi\rangle$ を満たす．ここに

$$\begin{aligned}(A,B) &\equiv \int d^3x\,A^{\dagger(*)}(\vec{x},t)B(\vec{x},t),\\\|\chi\|^2 &\equiv (\chi,\chi),\end{aligned}$$

また $|0\rangle$ は場の基底状態である．この $\chi(\vec{x},t)$ はもちろん c 数であるから，古典波に対すると同様な描像で考えればよい．ただし，次のような特殊事情がある．

ψ はエルミート演算子ではないので，異なる固有値 χ,χ' に対する固有状態 $|\chi\rangle,|\chi'\rangle$ は必ずしも直交しない：$|\langle\chi'|\chi\rangle|^2 = \exp(-\|\chi-\chi'\|^2)$．このため，各点 $\vec{x}$ での $\chi(\vec{x},t)$ は，$\exp(-\|\delta\chi\|^2) \leqslant 1$ 程度の不確定度 $\delta\chi$ をもつ．古典波では，もちろん，$\delta\chi = 0$ である．

ψ がフェルミ場の場合には，ψ そのものが (13) 式のゆえに観測可能量ではなくなる．物質波 ψ の観測は，したがって非常に間接的なものとなる．

何れにせよ，ψ は波動性を具現する働きをもつので，以下ではこれを “波動演算子” Ψ_w と呼び，記号的に $\Psi_\mathrm{w} = \psi$ と書く．

5.2 粒子性

場の全エネルギー H，全運動量 $\vec{P},\cdots$ は，はじめにも述べたように，一般に演算子 $\{N_{\vec{k}}\}$ をいわば単位として $H = \sum_{\vec{k}} E_k N_{\vec{k}}, \vec{P} = \sum_{\vec{k}} \vec{k} N_{\vec{k}},\cdots$ と書かれる．ここに $N_{\vec{k}}$ は固有値 $0,1,2,\cdots$（または $0,1$）をもつので，モード $\vec{k}$ の状態にある粒子数の演算子と呼ばれる．場の状態はしたがって粒子数によって指定され，これが場のもつ粒子性であると解釈される．

上記のモード $\vec{k}$ は，しかしながら，運動量の固有値であり，その固有状態は空間全体に拡がった平面波 $\exp(i\vec{k}\cdot\vec{x}/\hbar)$ に対応している．しかし，“粒子” を文字どおり空間的に局在した状態として考えたいのであれば，上のような $\vec{k}$ 空間ではなく，$\vec{x}$ 空間に基づく方式を採るべきであろう．以下ではそのような方式で考える．

いま $\psi(\vec{x}) \equiv \psi(\vec{x},0)$ として，物質密度の演算子を $\rho(\vec{x}) = \psi^\dagger(\vec{x})\psi(\vec{x})$ とする．このとき空間的領域 v の中に含まれる物質量は $N_v \equiv \int_v d^3x\,\rho(\vec{x})$ であり，特に全物質量は $v \to$ 全空間として，$N = \int d^3x\,\rho(\vec{x})$ で

与えられる．このとき $|\vec{x}\rangle \equiv \psi^\dagger(\vec{x})|0\rangle$ とし，場の交換関係 (13) を用いれば

$$N_v|\vec{x}\rangle = \begin{cases} |\vec{x}\rangle & (\vec{x} \in v), \\ 0 & (\vec{x} \notin v) \end{cases} \tag{16}$$

が示される．ここで $\vec{x} \in v$ のまま，領域 v を点 $\vec{x}$ にまで収縮させたとしても上式は成り立つから，状態 $|\vec{x}\rangle$ は点 $\vec{x}$ に存在する "何か" を表すことになる．さらに $N|\vec{x}\rangle = |\vec{x}\rangle$ でもあるから，N を総粒子数とすれば，この "何か" は点 $\vec{x}$ に存在する 1 個の粒子であると解釈してよい．また，期待されたように $\langle\vec{x}'|\vec{x}\rangle = \delta(\vec{x}-\vec{x}')$ も成り立つ．同様にして，n 個の粒子がそれぞれ点 $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \cdots, \vec{x_n}$ に存在する n 粒子状態は

$$|\vec{x_1}, \vec{x_2}, \cdots, \vec{x_n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\psi^\dagger(\vec{x_1})\psi^\dagger(\vec{x_2})\cdots\psi^\dagger(\vec{x_n})|0\rangle \tag{17}$$

で与えられる．

このように $\psi(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{x})$ は粒子状態を形成する演算子であるので，これらを "粒子演算子" $\varPsi_{\rm p}$ と呼ぶことにし，記号的に $\varPsi_{\rm p} = \psi$ と書こう．したがってこのとき $\varPsi_{\rm w} = \varPsi_{\rm p}$ であり，$\varPsi_{\rm p} = \psi(\vec{x})$ の引数 $\vec{x}$ は粒子の空間座標そのものを表している．また，先に与えた波動 χ を直接体現する状態 $|\chi\rangle$ を粒子像の立場から見れば，(15) 式から明らかなように，ここでは N が不定になっている．この意味で，波動性と粒子性とは確かに相補的である．

時刻 t における場の一般的状態 $|t\rangle$ は，基底ベクトル (17) を用いて

$$|t\rangle = \sum_n \int d^3x_1 \int d^3x_2 \cdots \int d^3x_n \times\varphi_n(\vec{x_1}, \vec{x_2}, \cdots, \vec{x_n}; t)|\vec{x_1}, \vec{x_2}, \cdots, \vec{x_n}\rangle \tag{18}$$

として展開される（シュレーディンガー表示）．展開係数 φ_n は，量子力学の一般原理により，$|t\rangle$ が $|\vec{x_1}, \vec{x_2}, \cdots, \vec{x_n}\rangle$ である確率振幅，すなわち n 個の粒子をそれぞれ点 $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \cdots, \vec{x_n}$ の近傍に見出す確率振幅としての意味をもつ．他方，ψ が S 型方程式 (14) を満たす場合には，$|t\rangle$ の運動方程式 $i\hbar|\dot{t}\rangle = H|t\rangle$ より，各 φ_n はポテンシャル $V(\vec{x})$ の中を運動する n 粒子に対するシュレーディンガー方程式と同一の式を満たすこと，が示される．これらの理由から，φ_n はシュレーディンガーの波動関数と同定される．

5.3 物質波と確率波

ψ の表す物質波 χ に対して，φ_n のことを確率波と呼ぶことにしよう．前者が物理的な 3 次元空間での実在波であるのに対し，後者は数学的な $3n$ 次元空間での波動であり，n 個の粒子の運動を規制する数学的な補助関数である．特に $n = 1$ の場合には，しかしながら，$\psi(\vec{x}, t)$ も $\varphi_1(\vec{x}, t)$ も全く同一の S 型方程式を満たす*4)．これは理論の G_4 共変性からして当然のことである．おそらくこのことが原因となって，量子力学史においては，ψ と φ_1 とがしばしば混同され，混乱を惹き起こすこととなった．しかし場の理論の立場を採れば，"波動" はダイコトミックに ψ と φ_1 とに二分され，"波動" にまつわる神秘性・多義性は解消される．

この二分法は，ド・ブロイの嚮導波（パイロット・ウェーブ）の考え方に似ている[4]．彼においては，いわば粒子・波動の二元論であって，電子は粒子としてあり，その水先案内をするのがいわゆるド・ブロイ波であった——あたかも水面に浮んだコルクが流れに沿って動くように．本稿での $|\vec{x}\rangle$ が前者に，$\varphi_1(\vec{x}, t)$ が後者に対応する．コペンハーゲン解釈に従えば，もちろん，$|\vec{x}\rangle$ は一般に位置観測の結果として出来する．また φ_1 は ψ とは異なり実在波ではない．

6. 質量の保存

質量保存の法則，あるいは物質不滅の法則は，1774 年ラヴォアジェが化学の研究に基づいて提案したとされている．他方，物理学はこの法則をどのように考えてきたのか．古典物理学の時代に，その枠内において，件の法則の理論的位置付けが必要だったと思われるが，筆者は寡聞にして知らない．物理学は，ニュートン以後アインシュタイン——1905 年の特殊相対論——に到るまで，いささか怠惰であったかに見える．

一般に，理論がより高次の新理論へと発展するとき，従来の理論ではいくつかの独立な保存則であったものが，そこでは一つの保存則として統合されることがある．また逆に，新理論は旧理論を，ある条件の下における一近似として，包含している．相対論的なエネルギー保存則と，古典力学におけるエネルギーや質量保存則との関連を，上記のような観点から眺めようとするならば，まず後者における質量保存則に対して，何

*4) 一般には，しかし ψ は非線形の方程式を満たす．これに対して φ_n の方程式はつねに線形である．

らかの理論的位置付けを与えておくべきであったろう．

ところで，5 次元的場の理論の立場を採れば，この問題は以下のようにして定式化される．いま系が，いくつかの場 $\phi_\alpha(x)(\alpha=1,2,\cdots)$ から成るとしよう．それらが相互作用下にあったとしても，各場 ϕ_α に対する束縛条件 (6) は，その質量 m_α を決定する条件として，そのまま維持されるべしと仮定しよう．このとき各 ϕ_α は第 5 座標 s を $\exp(-im_\alpha s/\hbar)$ の形で含むから，G_5 変換の一つ $s\to s+\lambda$（λ：定数）の下で，ϕ_α は位相（ゲージ）変換 $\phi_\alpha\to\phi_\alpha\exp(-im_\alpha\lambda/\hbar)$ を受ける．理論の G_5 不変性は，それゆえ，各相互作用項に対して $\sum_\alpha\tilde{m}_\alpha=0$ の成立を要求する．ここに $\sum_\alpha$ は件の相互作用項に含まれるすべての場 α についての和であり，場が $\phi_\alpha(\phi_\alpha{}^\dagger)$ であれば $\tilde{m}_\alpha=m_\alpha(-m_\alpha)$ とする．これはまさに質量保存則に他ならない．

理論は最終的に第 5 座標に依存すべきではないから，上記の関係式はすべての物理量に対しても成り立たなくてはならない．すなわち，質量保存則は超選択則でもある．なお，この保存則を支える数学的構造は，荷電保存則の場合と全く同型である．

7. 相対論的な場合

変換 G_4 または G_5 に代るものが，相対論的理論ではローレンツ変換（群），あるいはこれに 4 軸方向への併進をも含めたポアンカレ変換（群）であり，これらの下での共変性が理論の基本的対称性となる．以下では，非相対論的な場合との主な相違について略述する．

7.1 共変性

まず明白な相違は，エネルギー E_k と運動量 $\vec{k}$ との関係に現れ，これまでの $E_k=\vec{k}^2/2m>0$ が $E_k=\pm\sqrt{(\vec{k}c)^2+m^2c^4}$ となる．一般に，相対論的な場（質量 m，スピン S）は，ポアンカレ群のユニタリな既約表現によって表されるが，$E_k>0$ および $E_k<0$ に対応する表現 $\phi^{(+)}_{\cdots}(\vec{k})$ と $\phi^{(-)}_{\cdots}(\vec{k})$ とは，表現として見れば互いに独立である（下付き $\cdots$ は適当なテンソルまたはスピノルの成分を記す）．しかし両者の 1 次結合をとり

$$\phi_{\cdots}(x)=\int\frac{d^3k}{E_k}\Big\{\alpha_{\cdots}(\vec{k})\phi^{(+)}_{\cdots}(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-E_kt)/\hbar}+\beta_{\cdots}(\vec{k})\phi^{(-)}_{\cdots}(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-E_kt)/\hbar}\Big\} \tag{19}$$

として自由場 $\phi_{\cdots}(x)$ を定義し，この $\phi_{\cdots}(x)$ が次のような要請を満たすように，係数（一般には行列）$\alpha_{\cdots}(\vec{k}),\beta_{\cdots}(\vec{k})$ を決定する．その要請とは，(i) $\phi_{\cdots}(x)$ がローレンツ変換の下で，添字 $\cdots$ によって規定されるテンソル，スピノルあるいはスピノル・テンソルとして変換する；(ii) 理論は $\phi_{\cdots}(x),\phi^\dagger_{\cdots}(x)$ によって記述され，$\phi^{(\pm)}_{\cdots}(\vec{k})$ が単独で——例えばラグランジアンの中に——現れることがない；(iii) 場の演算子間の交換子 $[\phi_{\cdots}(x),\phi_{\cdots}(x')]_\mp,[\phi_{\cdots}(x),\phi^\dagger_{\cdots}(x')]_\mp$ が $(x-x')^\mu$ の空間的な領域で 0 となること，以上である．

上記 (i), (ii) はいわゆる共変性の条件であり[5)]，これに基づき，種々の表式をローレンツ共変な形に書くことができる．(iii) は局所的交換性，あるいはミクロ因果性の条件であり，交換子が不変デルタ関数 $\Delta(x-x')$ またはその微分のみを含む（もう一つの不変デルタ関数 $\Delta^{(1)}(x-x')$ は含まない）ようになっておればよい．このことから交換子の複号の上・下が，それぞれ $(2S)$ の偶・奇に応じて選定される．これはスピンと統計の定理に他ならない．さらに，場の局所的相互作用が狭義のローレンツ変換（時空軸の反転を含まない）に対して不変であるならば，いわゆる CPT 定理が保証される．すなわち理論は，C（粒子・反粒子共役），P（空間反転）および T（時間反転）より成る任意の順序の積に対して不変となる．理論はこのようにして，美しい形式的性質を賦与される．

7.2 粒子演算子

相対論的な場合に現れるもう一つの相違は，次の点である．波動演算子 Ψ_w を上記の要請に従って共変的な $\phi_{\cdots}(x)$ に関連して定義する限り，粒子演算子 Ψ_p との間には，もはや $\Psi_\mathrm{p}=\Psi_\mathrm{w}$ が成り立たないことである：$\Psi_\mathrm{p}\neq\Psi_\mathrm{w}$．このことは $\phi_{\cdots}(x)$ の引数 $\vec{x}$ が，粒子の空間的位置に対応しないことを意味する．例えば中性スカラー場（$S=0$）$\phi(x)$ の場合，$\Psi_\mathrm{w}(x)=\phi^{(+)}(x)$ とすると，$\Psi_\mathrm{p}(x)=\sqrt{2}\sqrt[4]{-\Delta+\lambda_\mathrm{c}^{-2}}\phi^{(+)}(x)$ である．ここに $\lambda_\mathrm{c}\equiv\hbar/(mc)$（コンプトン波長）である[*5)]．

他方，$S=1/2$ のディラック場 $\psi_\alpha(x)(\alpha=1,2,3,4)$ に対しては，上記の事実をわれわれはすでによく知っている．$\Psi_\mathrm{w}(x)=\psi^{(+)}(x)=\Psi_\mathrm{p}(x)$ として，$\psi(x)$ の引数 $\vec{x}$ を粒子の空間座標と見なすと，ハイゼンベルクの運動方程式より $|\dot{\vec{x}}|=c$ が結論される．$m\neq0$ である限り，これは矛盾である．すなわち，$\vec{x}$ は粒子の空間座標ではない．この結果はさらに，ディラック方程式を満たす関数 $\psi(x)$ は，シュレーディンガーの意味

*5) 演算子 $\sqrt[4]{-\Delta+\lambda^{-2}}$ の効果を積分核として表せば，λ_c 程度に拡がった関数となる．

での波動関数ではあり得ないこと，を意味する．

ディラックが当初，いわゆるディラック方程式を導いたとき，ローレンツ変換の下での共変性をもつ量（スピノル）が，シュレーディンガーの波動関数と同一の物理的意味をもつと考えた．しかしこれは，上で見たように，正しくはなかったのである．ディラック方程式を満たす $\psi(x)$ は，確率振幅ではなく，一つの場の量であると考えねばならない．このとき，その引数 $\vec{x}$ は，t と同様，場の量を指定するパラメーターとなる．粒子の位置を定義するには，$\psi(x)$ とは別に，改めて $\Psi_{\rm p}(x) \neq \psi^{(+)}(x) = \Psi_{\rm w}(x)$ であるような $\Psi_{\rm p}(x)$ を定義すればよい[2)]．

このように見るときディラックの論文は，その物理的解釈において，すべて正しくはなかったことになる．しかし歴史的に見れば，それは発見法的に偉大な役割を果したのであり，それのもつ価値は何ら損なわれることはない．

一般の $S, m \neq 0$ の場に対しても，同様に粒子演算子を定義することができる．ただし $m = 0$ の場合，この演算子は $S = 0, 1/2$ に対してのみ存在する[2)]．

7.3 数学的形式 vs 物理的意味

しかしながら，$\Psi_{\rm p}(x)$ を一つの場の量と見なすとき，これは $\phi_{\cdots}(x)$ とは異なり，共変性をもたない：ローレンツ変換を行うと共変項の他に，非局所的な非共変項が現れる．さらにその時間発展は因果律にも抵触する．他方，理論の記述に $\phi_{\cdots}(x)$ を用いる場合には，周知のように，こうした困難，すなわち基本的な物理的要請との矛盾は起こらない．それのみか副産物として，上記二定理の他にも，形式上の美しい性質がいろいろと導かれる．ただしその代価として，すでに見たように，$\phi_{\cdots}(x)$ の引数 $\vec{x}$ は直接的な物理的意味を失い，たんなるパラメーターとなってしまう．それでは，理論の数学的形式性と物理的意味，その何れをわれわれは尊重すべきなのであろうか．

結論をまず述べるならば，前者を選ぶのが正しい道であるように，筆者には思われる．歴史を振り返るとき，形式を重視し，それを拡張することによって理論が進歩し，物理的意味はそれに応じて変更を余儀なくされた——とこのような例を多く見出すからである．一概に物理的意味とは言っても，アプリオリに絶対かくあるべしといった類のものなどはなく，たんに過去の限られた経験から由来するにすぎない．それらは，したがって，新しい経験に即して絶えず改変していくべきであろう．

上述の粒子の位置に関する問題について言えば，事情は以下のようである．$\Psi_{\rm p}(x)$ と $\phi_{\cdots}(x)$ とはすでに見たように，互いに他に対して非局所的な関係にある．この結果 $\Psi_{\rm p}(x)$ によって決定された粒子の位置 $\vec{x}$ は，場の量 $\phi_{\cdots}(x)$ を用いて表すとき，コンプトン波長 $\lambda_{\rm c}$ 程度に拡がった表式となる．ここではしたがって“粒子の位置”なる概念をば，以下のように変更するのが妥当であろう．すなわち，件の概念は，本来，非相対論的なものであり，相対論的な粒子の位置は，コンプトン波長程度の範囲内でしか定まらない，と．

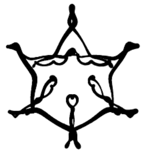
場 $\Psi_{\rm p}(x)$ は，しかしながら，理論の数学的構造が内包する一変数であり，われわれが理論の外から新たにもち込んだものではない．それにもかかわらず，$\phi_{\cdots}(x)$ は採るが，$\Psi_{\rm p}(x)$ は捨てねばならない．これは，例えばくりこみ理論において，くりこまれた量は用いるが，くりこまれていない量は考えない，のと同じである．与えられた数学的要素を基に，“良い理論”を構成する際には，どの要素は採るがどの要素は捨てる，といった選択則や禁制則を発動しなくてはならないように思われる．

参考文献

1) 岩波文庫『天文対話』，青木靖三訳，岩波書店 (1959).
2) 亀淵　迪・表　実，『量子力学特論』，朝倉書店 (2003).
3) Y. Ohnuki and S. Kamefuchi, “Quantum Field Theory and Parastatistics”, Univ. of Tokyo Press/Springer Verlag (1982).
4) 例えば J.L. Andrade e Silva et G. Lochak, “Quanta, grains et champs”；邦訳『量子』，高林武彦・荒牧正也訳，平凡社 (1970).
5) 大貫義郎，『ポアンカレ群と波動方程式』，岩波書店 (1976).

（かめふち・すすむ，筑波大学名誉教授）

宇宙論とプランク定数



池内　了

1. はじめに

宇宙と言えば極大のマクロ世界のことであり，プランク定数は極小のミクロ世界を特徴づける定数である．それらの間に関係をつけるとなれば，宇宙が極小の時代であった宇宙創成とか量子宇宙が頭に浮かぶ．ところが，そのような話題に疎い私なので，ここでは，宇宙の進化における物理過程を追いながら，プランク定数がどのような場面に登場しているかを見ることにしたい．特に，この宇宙を特徴づける膨張率（ハッブル定数）や宇宙の質量密度というマクロな量とプランク定数というミクロな量が，どのように絡み合っているかを簡単な次元解析でまとめる．

2. プランク世界——宇宙の創成

この宇宙は重力によって支配されているが，重力を相対論的に記述したのがアインシュタインの一般相対性理論であり，一般相対論的効果によって予言される特徴的な天体がブラックホールである．質量 m のブラックホールの半径は，重力定数 G と光速度 c を用いて

$$R_{\mathrm{BH}} = \frac{2Gm}{c^2} \tag{1}$$

で表される（以下では係数の 2 を省略する）．半径がこのサイズ以下になると重力によって特異点にまで収縮を続け，いかなる情報も外部に取り出すことができなくなる．ブラックホール半径は，重力が支配する系を特徴づけるスケールと言うことができる．

一方，量子的世界ではハイゼンベルクの不確定性関係が成立しており，それは質量 m の粒子に対するコンプトン波長として表される．コンプトン波長は，プランク定数 h と光速度 c を用いて

$$R_{\mathrm{C}} = \frac{h}{mc} \tag{2}$$

として表現される．不確定性関係のために，粒子は必然的にこの大きさに広がってしまうのだ．その意味で，コンプトン波長は量子世界を特徴づけるスケールと言える．

これら 2 つのスケールが一致する質量が

$$m_{\mathrm{Pl}} = \sqrt{\frac{hc}{G}} \sim 10^{-8}\,\mathrm{kg} \tag{3}$$

で，これがプランク質量である．エネルギーで表すと

$$E_{\mathrm{Pl}} = m_{\mathrm{Pl}}c^2 = \sqrt{\frac{hc^5}{G}} \sim 10^{19}\,\mathrm{GeV} \tag{4}$$

で，プランクエネルギーと呼ぶ．この質量（あるいはエネルギー）領域では，重力と量子論効果の双方が対等に働くことになる．(2) 式または (3) 式から

$$R_{\mathrm{Pl}} = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} \sim 10^{-35}\,\mathrm{m} \tag{5}$$

という特徴的なスケールであるプランク長が得ら

れ，これを光速度で割ったものがプランク時間

$$t_{\rm Pl} = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} \sim 10^{-44}\,{\rm s} \qquad (6)$$

である．

むろん，次元解析によって基本定数 (G, h, c) からプランクの名がつく3つの基本次元 $(m_{\rm Pl}, t_{\rm Pl}, R_{\rm Pl})$ が得られるのだが，上のように求めることによって物理的に一般相対性理論と量子論の双方が対等な寄与をする世界であることがわかる．つまり，重力も量子化した「量子重力理論」が適用される世界である．言い換えると，重力まで含めた4つの力すべてが統一された理論，世に言う「究極の理論（TOE: Theory Of Everything)」だが，まだ完成されるに至っていない．そのため，私たちはプランク長以下の状態については何も言えない．

逆に言えば，プランク時間を通過して（あるいはプランクエネルギー以下となって)，量子重力から古典的な一般相対性理論が分岐し，私たちが使っている時間や空間が出現するのだから，この時刻に宇宙が創成されたと考えられる．プランク時間とはこの宇宙の出発の時間であり，そのときのサイズであるプランク長という有限の大きさで宇宙が誕生したのだ．宇宙はゼロ秒で始まったのではなく，またサイズゼロで生まれたのでもない．赤ん坊が誕生したとき，私たちは便宜上ゼロ歳と呼ぶが，細胞はすでに有限の物理的時間を経過しているのに似ている．宇宙の現在の時刻は $5 \times 10^{17}\,{\rm s}$ 程度で，サイズはそれに光速度を掛けた $1.5 \times 10^{26}\,{\rm m}$ 程度だから，宇宙は創成時から60桁大きくなったことになる．

基本的に上と同じことだが，プランク質量は，無次元化した重力定数

$$\alpha_{\rm g} = \frac{Gm^2}{hc} = \left(\frac{m}{m_{\rm Pl}}\right)^2 = 1 \qquad (7)$$

から得られる．無次元化した重力定数が質量（エネルギー）に依存しており，質量が陽子程度の低エネルギー世界では $\alpha_{\rm g} \sim 10^{-38}$ と小さいが，プランク質量になると重力も他の力と同程度に強くなっているとも言える．もし電磁力がエネルギーによって変化しないとすると，微細構造定数を $\alpha_{\rm e}$ として，重力が電磁力と同じ強さとなる $\alpha_{\rm g} = \alpha_{\rm e}$，つまり

$$m = m_{\rm Pl}\sqrt{\alpha_{\rm e}} \sim 9 \times 10^{17}\,{\rm GeV} \qquad (8)$$

のエネルギースケールで，量子電気力学に重力の効果を考慮しなければならない．

念のために，素粒子間に働く3つの力が統一されるエネルギースケールを見積もっておこう．強い力の漸近的自由（距離が近づくにつれクォーク間に働く力が弱くなる）という特性を近似的に

$$\alpha_{\rm s} = \frac{a}{\ln\left(\frac{m}{m_{\rm p}}\right)} \qquad (9)$$

と書こう．ここに，$m_{\rm p}$ は陽子の質量，a は無次元化した強い力の有効結合定数（$g_{\rm s}^2/hc$ のオーダー）で，3世代6個のクォークを基礎とする大統一理論だと $\pi/12$ である．強い力が電磁力と等しくなる $\alpha_{\rm s} = \alpha_{\rm e}$ は

$$m = m_{\rm p} \exp\left(\frac{a}{\alpha_{\rm e}}\right) \sim 4 \times 10^{15}\,{\rm GeV} \quad (10)$$

で，3つの力が統一されるエネルギースケールである．(4) 式，(8) 式，(10) 式の3つのエネルギースケールは比較的近い上に，微細構造定数のエネルギー依存性を考慮すると，力の統一理論は必然的に重力まで含めた量子重力理論を目指さねばならないように見える．

3. ミニブラックホールの蒸発

この宇宙を特徴づける重要な物理量は膨張率を表すハッブル定数 H で，簡単のために宇宙の時間 t と

$$H(t) = \frac{1}{t} \qquad (11)$$

と書いておく．最近なされた人工衛星による宇宙背景放射の揺らぎの詳細な観測によって，現在の宇宙時間は $t_0 = 137$ 億年 $\sim 5 \times 10^{15}\,{\rm s}$, $H(t_0) = H_0 \sim 71\,{\rm km/s/Mpc}$ とされている．

3つの基本定数として，ハッブル定数 $H(t)$ と質

量 M の天体とプランク定数 h をとってみよう．このとき

$$R_{\rm h}(t)=\sqrt{\frac{h}{MH(t)}} \tag{12}$$

という長さの次元が得られる．これは，光速度 c を補助変数として導入すると

$$\frac{1}{H(t)}=t=\left(\frac{Mc^2}{h\nu_{\rm h}}\right)t_{\rm h} \tag{13}$$

と書き換えることができる．ここで

$$\nu_{\rm h}=\frac{c}{R_{\rm h}(t)}=\frac{1}{t_{\rm h}} \tag{14}$$

と定義している．$\nu_{\rm h}$ は波長 $R_{\rm h}$ に対する光子の振動数であり，$t_{\rm h}$ はその逆数で光子の振動時間となっている．(13) 式は，時間スケール $t_{\rm h}$ ごとにエネルギー $h\nu_{\rm h}$ の光子が 1 個ずつ放出されるとして，静止エネルギー全部を放出してしまうまでの時間と解釈することができる．

このような状況は，ホーキングが「ブラックホールはブラックならず」とした，温度を持つミニブラックホールの蒸発と関係していそうである．そこで，いったん (12) 式の半径が質量 M のブラックホール半径 $R_{\rm BH}$ と等しいとしよう．すると

$$\frac{1}{H}=t=\frac{(GM)^2M}{hc^4} \tag{15}$$

が得られる．実際に，これがホーキングが求めたミニブラックホールの蒸発時間と一致することを，不確定性関係を用いて簡単に示すことができる．

不確定性関係より，半径 $R_{\rm BH}$ 周辺のエネルギーの不確定量は

$$\Delta E=\frac{h}{\Delta t}=\frac{hc}{R_{\rm BH}}=\frac{hc^3}{GM} \tag{16}$$

である．したがって，エネルギー放出率は

$$L=\frac{\Delta E}{\Delta t}=\frac{c\Delta E}{R_{\rm BH}}=\frac{hc^6}{(GM)^2} \tag{17}$$

となる．ブラックホール表面の有効温度を $T_{\rm eff}$ とすると

$$L=4\pi {R_{\rm BH}}^2\sigma {T_{\rm eff}}^4 \tag{18}$$

だから（σ はシュテファン・ボルツマン定数で，$\sigma=\pi^2k^4/60c^2h^3$），ブラックホールの有効温度は

$$T_{\rm eff}=\frac{hc^3}{GMk} \tag{19}$$

と表される．質量が小さいほど表面温度が高く，エネルギーを多く放射する．この放射によってブラックホールが蒸発するが，その寿命は静止エネルギーを放出してしまうまでの時間として

$$t_{\rm BH}=\frac{Mc^2}{L}=\frac{(GM)^2M}{hc^4} \tag{20}$$

が得られ，(15) 式と一致する．質量がプランク質量とすると，蒸発時間はプランク時間になる．つまり，宇宙がプランク質量のブラックホールで誕生したとしても，プランクエネルギーの光を放出してブラックホールは消えてしまうのである．

$t_{\rm BH}=t_0$ とすると，現在の宇宙時間までに蒸発するミニブラックホールの質量は

$$M_{\rm evp}=\left(\frac{hc^4t_0}{G^2}\right)^{\frac{1}{3}}\sim 10^{12}\,{\rm kg} \tag{21}$$

で，彗星程度の大きさに当たる．宇宙初期に，この質量以下のミニブラックホールが多く生成されるなら，宇宙を加熱する重要な熱源となるだろう．

4. 物質のみの宇宙

この宇宙を特徴づけるもう 1 つの量がある．それは単位体積当たりのバリオン数と光子数の比で

$$\eta=\frac{n_{\rm p}}{n_{\rm r}}\sim 10^{-9} \tag{22}$$

であり，宇宙膨張の過程で保存される量である．

もし，この宇宙が創成されたとき，物質と反物質が同じ数だけ作られた（対称）とすると，その後の膨張過程での対消滅によってほとんどが光子に変わってしまうので，この値はもっと小さいはずである（例えば，10^{-20}）．こんなに大きいのは，物質が多くある部分と反物質が多くある部分に分離し，私たちはたまたま物質の多い領域に属していると考えざるを得ない．しかし，現在のところ，反物質が多数を占めている領域（反物質製の銀河）は観測されておらず，またそんな領域があれば物

質領域との境目で対消滅が起こり強いガンマ線が観測されるはずだが，それも観測されていない．したがって，この説は成り立たないことになる．

他方，宇宙の過去は高温高密度の状態であったと考えられるが，もし宇宙の創成時は高温でなく冷たかったら，η の値は 1 程度であったことになる．その場合，バリオン数が保存されるとすると，非断熱過程で光子が多数作られて η の値が小さくなったとせざるを得ないが，9 桁も光子数を増やすような物理過程は考えにくい．この立場から言えば，η は小さすぎるのである．

そこで考えられるのは，バリオン数の非保存である．たとえ宇宙創成時には物質と反物質が対称で同数生成されたとしても，その後バリオン数非保存反応が起こってバリオンの量が反バリオンより少しだけ卓越したとするのだ．対消滅で反バリオンはすべて光子になったとすると

$$\eta = \frac{n_{\mathrm{B}} - n_{\bar{\mathrm{B}}}}{n_{\mathrm{B}} + n_{\bar{\mathrm{B}}}} \tag{23}$$

となる．バリオン数と反バリオン数が 9 桁目で異なっていればよいのである．

そこで，大統一理論などで予測されているような，バリオン数を保存しない反応を媒介する粒子 X とその反粒子 $\bar{\mathrm{X}}$ が同数あり，それらの崩壊モードで CP 保存則が ε だけ破れているとすれば，結果的にバリオンと反バリオンの数が異なってくると考えられる．ただし，もう 1 つ考慮すべき点がある．X 粒子の崩壊率が宇宙の膨張率より大きいと，X 粒子の個数は熱平衡値となってしまうので急速に減ってしまい，実際に生じるバリオン非対称は小さくなってしまうことだ．そこで少なくとも，X 粒子が対生成される $kT \sim m_{\mathrm{x}}c^2$ の時点で，X 粒子の崩壊率 Γ_{x} は宇宙の膨張率 H より小さくなっていなければならない．X 粒子の個数密度 n，崩壊の断面積 σ，速度 v とすると，X 粒子の崩壊率は

$$\Gamma_{\mathrm{x}} = n_{\mathrm{x}} \langle \sigma v \rangle \tag{24}$$

で与えられる．簡単のために，個数密度は相対論的粒子と同じとして

$$n_{\mathrm{x}} = \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \tag{25}$$

とし，$v = c$，断面積は

$$\sigma = \alpha \left(\frac{h}{m_{\mathrm{x}} c} \right)^2 \tag{26}$$

とする．$\alpha (= g^2/hc)$ は相互作用定数である．一方，放射エネルギーが卓越した時代のハッブル定数は

$$H \sim \sqrt{G\rho_{\mathrm{r}}} \sim \frac{(kT)^2}{h m_{\mathrm{Pl}} c^2} \tag{27}$$

と表される．$kT \sim m_{\mathrm{x}}c^2$ の時点で $\Gamma_{\mathrm{x}} < H$ の条件から

$$m_{\mathrm{x}} > \alpha m_{\mathrm{Pl}} \tag{28}$$

という条件が得られる．3 つの力の統一がエネルギースケール (10) 式で起こるとすれば，$\alpha \sim 10^{-3}$ 程度でなければならない．B 中間子を使った実験結果では，弱い相互作用に起因する CP 対称性の破れが小さすぎるので，そのままでは η の値は説明できないようである．

5. ダークマター候補の素粒子質量

宇宙が開いているか閉じているかの境目の密度が臨界密度であり

$$\rho_{\mathrm{crt}} = \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{29}$$

で定義される（以下では，係数は無視する）．宇宙に存在する物質の質量密度を臨界密度で割った量

$$\Omega_{\mathrm{m}} = \frac{\rho_{\mathrm{m}}}{\rho_{\mathrm{crt}}} \tag{30}$$

を密度パラメターと呼び，この宇宙を特徴づける重要なパラメターである．

宇宙初期の元素合成の理論と観測の比較から，宇宙に存在するバリオン量は $\Omega_{\mathrm{b}} \sim 0.04$ 程度と見積もられている．一方，回転する銀河の重力場の大きさから推定した質量密度は $\Omega_{\mathrm{m}} \sim 0.3$ であり，その差は電磁波では観測できない物質，つまりダークマター（暗黒物質）であろうと考えざ

るを得ない．ダークマターの候補としては，弱い相互作用しかしない質量を持つ素粒子（WIMPs: Weakly Interacting Massive Particles）が最有力だが，その質量はどれくらいだろうか．Ω_m が 0.3 のオーダーという条件から，ダークマターとなりうる素粒子の質量範囲を求めてみよう．

宇宙の初期は非常に高温で輻射のエネルギーが卓越していた．このような時代では，高エネルギー光子から電磁相互作用によって素粒子が対生成され，それらから弱い相互作用によって WIMPs が形成される．初期の段階では，それらの逆反応も起こって全体として熱平衡状態となっている．しかし，宇宙が膨張するにつれ粒子数密度や温度が下がるので，やがて逆反応が宇宙膨張に追いつかなくなってしまう．その結果，WIMPs が宇宙に取り残され，それらが大量にあればダークマターとして重力を及ぼすことになる．

WIMPs が宇宙に取り残されるのは，弱い相互作用による素粒子間の反応率 Γ と宇宙膨張率 H を比較して

$$\frac{\Gamma}{H} \sim 1 \tag{31}$$

となる時点である．ハッブル定数は (27) 式を用いる．フェルミオン間の弱い相互作用による素粒子反応の断面積は，

$$\sigma_w = \frac{{\alpha_w}^2 (hc)^2 E^2}{({m_w}^2 c^4 + E^2)^2} \tag{32}$$

と表される．ここで，α_w は弱い力の相互作用定数，m_w は弱ボソンの質量である．この反応が止まるときの宇宙の温度 kT が WIMPs 1 個の静止エネルギー mc^2 より大きいときは，素粒子は相対論的粒子として生成され（熱いダークマター），逆に $kT < mc^2$ の場合，素粒子は非相対論的粒子として生成される（冷たいダークマター）．それらは別々に扱う必要がある．

相対論的粒子の場合

反応のエネルギー $E(\sim kT)$ が弱ボソンの静止エネルギーより十分小さい場合 $(kT \ll m_w c^2)$ は，弱い相互作用による反応率は

$$\Gamma \sim \frac{n {\alpha_w}^2 (hc)^2 E^2 c}{(m_w c^2)^4} \tag{33}$$

と表される．n は着目する素粒子の数密度で，相対論的粒子の場合は質量をゼロとみなせるので光子と同じく $n \sim (kT/hc)^3$ である．これから

$$\frac{\Gamma}{H} \sim {\alpha_w}^2 \left(\frac{m_{Pl}}{m_w}\right)\left(\frac{kT}{m_w c^2}\right)^3 \sim \left(\frac{kT}{5\,\mathrm{MeV}}\right)^3 \tag{34}$$

が得られる．つまり，宇宙の温度が 5 MeV 程度の時刻に素粒子が取り残されるのである．現在の数密度は，宇宙のスケールファクター a（現在の値は a_0）を用いて

$$n_0 = n\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 = n\left(\frac{T_0}{T}\right)^3 \tag{35}$$

となり，質量密度は

$$\rho_0 = m n_0 \sim m\left(\frac{kT_0}{hc}\right)^3 = m n_{r,0} \tag{36}$$

と表される．$n_{r,0}$ は現在の宇宙背景放射の光子数密度である．密度パラメターは

$$\Omega_m \sim \left(\frac{m}{100\,\mathrm{eV}}\right)\left(\frac{H_0}{100}\right)^{-2} \tag{37}$$

となり，Ω_m は 0.3 程度だから，素粒子の質量は 30 eV 前後でなければならないことがわかる．相対論的粒子のダークマター候補としてニュートリノが注目されてきたが，最近のニュートリノ振動の観測結果は質量が小さすぎてダークマターとはなり得ないようである．

非相対論的粒子の場合

簡単のために反応率を

$$\Gamma \sim n \sigma_w \sqrt{\frac{kT}{m}} \tag{38}$$

と近似しよう．熱平衡を仮定すると数密度は

$$n \sim \left(\frac{mkT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mc^2}{kT}\right) \tag{39}$$

と書けるから，ハッブル定数との比が

$$\frac{\Gamma}{H} \sim \frac{\sigma_w m m_{Pl} c^2}{h^2} \exp\left(-\frac{mc^2}{kT}\right) \sim 1 \tag{40}$$

を満たすと反応が止まる．指数関数部分を (39) 式に代入し，$E \sim kT \sim mc^2$ とすると

$$n \sim \left(\frac{c}{h}\right)^3 \frac{(m^2 + m_{\mathrm{w}}{}^2)^2}{\alpha_{\mathrm{w}}{}^2 m_{\mathrm{Pl}}} \tag{41}$$

となり，現在の質量密度は

$$\rho_0 \sim \frac{(m^2 + m_{\mathrm{w}}{}^2)^2 n_{\mathrm{r},0}}{\alpha_{\mathrm{w}}{}^2 m^2 m_{\mathrm{Pl}}} \tag{42}$$

と求められる．Ω_{m} が 1 のオーダーになるのは，$m \sim 10\,\mathrm{GeV}$ と $m \sim 1000\,\mathrm{GeV}$ となる．現在のところでは，これらの質量を持つ素粒子は見つかっておらず，超対称性理論から予言される素粒子の超対称パートナーが候補となっている．

6. 銀河の質量

私たちの宇宙を「銀河宇宙」と呼ぶのは，電磁波によって観測する宇宙の基本構造が銀河であるためだ．ならば，銀河はこの宇宙を特徴づける天体であり，その質量やサイズはハッブル定数などの宇宙論的パラメターで決定されているはずである．さらに，プランク定数まで絡んでいるなら，銀河はマクロ世界とミクロ世界の結節点と言えるだろう．そこで，まずマクロ世界で銀河が誕生する条件を求め，次にミクロの物理法則によって銀河の物理量がどのように決まっているかを調べてみよう．

銀河の収縮半径

3 つの基本定数として，ハッブル定数 H と重力定数 G，そして天体の質量 M を採用する．これから長さの次元として

$$R_{\mathrm{m}}(t) = \left(\frac{GM}{H^2(t)}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{43}$$

が得られる．この式を書き換えると

$$\left(\frac{H(t)}{R_{\mathrm{m}}(t)}\right)^2 = \frac{GM}{R_{\mathrm{m}}(t)} \tag{44}$$

となる．物質が宇宙とともに膨張している場合，その膨張速度は $v = HR_{\mathrm{m}}$（ハッブルの法則）だから，左辺は宇宙膨張による運動エネルギーを表している．右辺は重力エネルギーを表していて，$R_{\mathrm{m}}(t)$ でこれら 2 つが等しくなっている．右辺のほうが大きいときに，宇宙とともに膨張している質量 M の固まりが自らの重力によって収縮しうることになる．したがって，$R_{\mathrm{m}}(t)$ は，宇宙膨張に抗して収縮できる領域の大きさの上限値となっている．例えば，質量が銀河サイズである $M = 10^{41}\,\mathrm{kg}$ の固まりが時刻 $t = t_0/10$ で収縮できるためには，サイズが

$$R_{\mathrm{m}}\left(t = \frac{t_0}{10}\right) \sim 3 \times 10^{21}\,\mathrm{m} \tag{45}$$

以下でなければならない．この宇宙における銀河形成の条件から，特徴的なスケールが決まることがわかる．

このことは，もっと単純に言うことができる．(43) 式から球対称を仮定して係数を考慮すると，密度が (29) 式の臨界密度になる．これは，宇宙が永久に膨張を続けるか（開いた宇宙），膨張した後収縮に転じるか（閉じた宇宙）の境界で，臨界密度は膨張による運動エネルギーと重力エネルギーの比がちょうど 1 になる場合である．それより密度が高いとやがて収縮に転じ，密度が低いと膨張し続けることになる．質量を決めると，臨界密度になるサイズが (43) 式のように決まり，このサイズ以下だと密度が臨界密度を上回るので収縮に転じることができるのである．以上は，宇宙膨張と重力というマクロな量の比較だからプランク定数とは関係しなかった．

銀河の質量

上では，銀河の質量を仮定したが，それはどのように決まっているのだろうか．今，質量 M，半径 R，密度 $\rho(= M/R^3)$，圧力 P の原始銀河雲を考える．単位質量あたりの内部エネルギー P/ρ と重力エネルギー GM/R が等しい条件から

$$M = \left(\frac{P}{G\rho^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{46}$$

という関係が得られる．これは，自己重力で収縮できる天体の質量の下限値で，ジーンズ質量と呼ばれる．

質量が (46) 式より大きいと自己重力で収縮を開始するが，重力エネルギーが解放されるためガス雲の温度や圧力が上昇し収縮を妨げることになる．さらに収縮が続くためには，宇宙膨張より速くガス雲から熱エネルギーが放出されねばならない．この条件は

$$t_{\rm cool} < \frac{1}{H(t)} \tag{47}$$

となる．$t_{\rm cool}$ がガス雲の冷却時間で，電子の熱制動放射

$$\varepsilon = \frac{k_{\rm f}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^3\sqrt{kT}}{hc^3 m_{\rm e}^{\frac{3}{2}}} \tag{48}$$

を仮定すると（$k_{\rm f}$ は数値係数）

$$t_{\rm cool} = \frac{3kT}{n\varepsilon} \tag{49}$$

と書くことができる．ガス雲の温度はビリアル定理より

$$T = \frac{GMm_{\rm p}}{kR} \tag{50}$$

とすると，(47) 式の条件から半径 R と M に対し

$$\frac{R^5}{M} < \frac{k_{\rm f}{}^2\alpha_{\rm e}{}^6}{\alpha_{\rm g}}\left(\frac{h}{m_{\rm e}c}\right)^3\left(\frac{c}{H}\right)^2\frac{1}{m_{\rm p}} \tag{51}$$

という関係式が得られる．(43) 式の半径を代入すると，質量への上限値として

$$M < M_{\rm max} = \frac{k_{\rm f}{}^3\alpha_{\rm e}{}^9}{\alpha_{\rm g}{}^4}\frac{R_{\rm e,C}{}^{\frac{9}{2}}}{R_{\rm p,C}{}^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{H(t)}{c}\right)^2 m_{\rm p}$$
$$\sim 1\times 10^{38}\,{\rm kg} \tag{52}$$

と基本定数とハッブル定数が混じった形で銀河質量のオーダーを求めることができる．ここに，$R_{\rm i,C}({\rm i}={\rm e,p})$ は粒子 i のコンプトン波長である．ミクロプロセスで起こるガス雲の冷却率とマクロな宇宙膨張率を比較しているとも言える．

ただ，ここの議論には重力の主要な部分を占めるダークマターの寄与を考慮しておらず，必ずしも正しくない（ガス雲の冷却にはバリオンが効き，重力にはダークマターが効く，という設定をしなければならないが，そうするとバリオン質量とダークマター質量の関係しかつけられないためである）．

7. おわりに

以上の議論は，この宇宙を特徴づけるハッブル定数（＝膨張率）と素粒子や原子などのミクロ過程の反応率を比較して，どのような物質構造が形成されるかを検討したものである．いわば，この宇宙の構造が，マクロな膨張率とミクロな反応率のせめぎ合いによって形成されたのだ．後者の反応率にプランク定数が入ってくることから，奇しくも大文字の H のハッブル定数と小文字の h のプランク定数が宇宙の風景を演出していることになる．そして，もしこれら 2 つの定数が異なった宇宙が存在するとすれば，それは私たちの宇宙とはまったく異なった構造となっていると予想される．ここに人間原理の宇宙論が登場する所以があるのだが，紙数も尽きたのでここで筆をおきたい．

参考文献

1) T. Padmanabhan: Structure Formation in the Universe (Cambridge University Press, 1993).
2) 佐藤文隆：『宇宙物理』（岩波講座　現代の物理学第 11 巻，1995）.
3) 池内　了：『宇宙と自然界の成立ちを探る』（サイエンス社，1995）.

（いけうち・さとる，名古屋大学大学院理学研究科）

プランク定数とトポロジー



倉辻 比呂志

1. 序（あるいは言い訳）

“プランク定数とトポロジー” という題目を見て，読者は何の話かといぶかるのではないかと思います．実際，正直なところ筆者もこの題目を与えられて，当惑する，あるいは雲をつかむ印象をもってしまいました．そこで，この題目に確定した意味をもたせることは，筆者には無理であると判断して，はじめから開きなおります．すなわち，筆者自身が，“こういう風なものであれかし” と勝手に解釈した範囲での話をさせていただくことにします．というわけで，さしあたり，

1：プランク定数自身を何かトポロジー的不変量として説明する．

2：プランク定数は量子力学での要の普遍定数であるから，量子力学的現象に現れると思われる位相不変量をプランク定数と関係づける．

という 2 つの観点が思い浮かびます．ここで，位相不変量という言葉を説明なしに使いましたが，後ほど説明することにして，何か量子力学的状態の全体的構造を表すような量であるとしておきます．

1 に関しては，これができれば，あるいは量子力学の起源に肉迫できようかというもので画期的なものになるかもしれません（そのようなものがあればの話ですが）．しかし，これまでのところそのような説明はできそうもありません．そこで，必然的に話は 2 に限定されてしまいます．かなり，平凡あるいは消極的になってしまいますが．しかし，できたら 1 の根本的な問題も推測できるような観点ももっていきたいと思います．

2. トポロジーのことなど

トポロジーという概念の物理学における意味づけも実ははっきりとしたものがあるわけではないと，ここでも，excuse させていただきます．ですから量子力学においてもトポロジー的（トポロジカル）な概念を使うということも各人によって解釈が異なるところがあるかもしれないということも頭に入れていただくことにします．

なにやら言い訳ばかりになってしまいますが，数学では，位相という概念は全体として対象をとらえるという思想を根拠にしています．位相幾何学はポアンカレを始祖とする連綿たる歴史がその学問の深さを象徴しています．位相幾何として通俗的で有名なものは，ジョルダンの曲線定理とケーニヒスベルク橋の問題（いわゆる一筆書きの問題）といったものでしょう．これらは直感的に自明なものとパズルの要素のあるものです．そこから，ぐっと専門に入ると，ガウス-ボンネの定理があります．これは微分幾何の問題で，曲面の曲率（ガウス曲率）という解析的対象を積分すると，それがオイラー標数になるというものです．たしかに，これは驚異的な結果だということは直感的にうな

ずけます．なぜなら，曲率などのように局所的に定義された量を積分すると，特定の不変な数値になるというのはにわかには信じがたい事実だからです．これが数学のうちでも最も深遠な定理の一つであるといわれる所以でしょう．さらに驚異的なことは，現代的場の理論において，ある種のゲージ場中のディラック方程式の解の次元（正確には，ゼロ固有値解の次元）が，この定理の延長として理解できるというきわめつけの理論にいたります：いわゆる，アティヤ-ジンガー指数定理です[1]．

このような高度な理論を離れて，コーシーの積分定理があげられます．すなわち，$f(z) = 1/z$ を，複素平面の原点のまわりのお互いに連続的に変形できる閉曲線に沿って積分したときに同じ値を与えるという内容です．2次元の流体力学は関数論に帰着されることを考えると，特に渦の現象はコーシー積分定理そのものとなるといえます．さらに，これは2次元の量子ホール流体での波動関数の零点がトポロジカル素励起を与えるということと密接に関連します．

そこで，このように物理的な意味づけができる数学的量で，トポロジカルな性質を持つ物理量（特に積分量がそうですが）で特徴づけられる量子現象を理解しようというのが，ここで狙っている問題ということなります．

3. ボーア・ゾンマーフェルト因子とディラック因子

さて，この辺で本論へ入ります．上で見たように物理でトポロジー的対象が重要になるらしい一つの量は，積分公式を通じてであるといえそうです．幸いにして量子力学においても，その考えは生かせます．

3.1 ボーア・ゾンマーフェルト因子

量子力学を安直にいってしまえば，波動関数が

$$\psi \sim A \exp\left[\frac{i}{\hbar} S\right] \tag{1}$$

によって書かれるという言い方ができます．ただし，エネルギーが一定の定常状態を考えているとします．このように書いたのは，もちろん正確なものではなくて，古典力学という我々におなじみの概念を使って表せばこうなるという意味です．S は作用関数で，古典軌道が与えられると決まる量です．また，A は振幅関数です．特に，周期軌道の場合に S を，

$$\Phi_{\mathrm{BS}} = \exp\left[\frac{i}{\hbar} \oint_C \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{x}\right] \tag{2}$$

と書きます．これを，ボーア・ゾンマーフェルト因子（BS因子）と呼びます．これから，ψ が1価であるという要請をおけば，$\oint p dx = 2n\pi\hbar$（n は整数）となって，有名なボーア・ゾンマーフェルト量子条件が得られます（実際には，振幅の構造を考慮したいわゆるケラー・マスロフ指数がつきます）．ともかくも，位相空間の中での周期軌道を与えると，"プランク定数が介在する" ことによって，安直な量子力学が得られるというわけです．

このように軌道の量子化をするためには具体的に周期軌道を構成しなければならないのですが，これを求めるのは一般的には大変難しい問題です．しかし，そうはしなくても，トーラスというものの存在を認めると，それを基礎に量子条件が得られることが知られています．すなわち，1次元トーラスの n 個の直積を考え，その上で，独立な n 個のサイクルをとって，これに沿って，n 個の作用積分をつくります：

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_i} \sum_{k=1}^{n} p_k dq_k. \tag{3}$$

これは，C_i をトポロジカルに変形しても値は不変であるという意味で，トポロジカル不変量ということができます．実際，$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}$ に注意すれば，J_i はサイクルの形にはよらないことがわかります．

3.2 ディラック因子

さて，BS因子は，作用積分という純力学的な概念から構成されるものですが，それと兄弟分にあたる位相因子が出てきます．それがディラック位相因子（以下では，単にディラック因子と呼びます），すなわち，

$$\Phi_{\mathrm{D}} = \exp\left[\frac{ie}{c\hbar} \oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{x}\right] \tag{4}$$

なる量です．ディラック因子に関しては，すでに別の所で述べましたが[2)]，簡単に復習します．要点は，波動関数の非可積分的な位相が電磁場の存在を主張するということです．非可積分の意味は，多変数の線積分の値が経路が異なると値が違ってくるという一見単純な事実です．これは，不定な位相をもつ波動関数というもので記述されます．それを

$$\psi = \tilde{\psi} \times \exp[i\beta] \tag{5}$$

とおきます．ここで，$\tilde{\psi}$ は，“確定した位相” をもつ波動関数で，β が非可積分位相です．ここで，この位相はすべての波動関数に共通のもので，それゆえ，時空の性質（つまり，“場”）を反映したものであることに注意します．波動関数 ψ に対して，作用する運動量演算子 $p_k = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}$ が波動関数 $\tilde{\psi}$ に対しては，

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k} + \hbar\frac{\partial \beta}{\partial x_k} = p_k + \hbar\frac{\partial \beta}{\partial x_k} \tag{6}$$

のように置きかえられると解釈されます．つまり，

$$\boldsymbol{A} = \frac{c\hbar}{e}\nabla\beta, \quad A_0 = -\frac{\hbar}{e}\frac{\partial \beta}{\partial t} \tag{7}$$

が，電磁ポテンシャルと見なされるというわけです．いわば，非可積分位相なる，“仮想的” なものの勾配から電磁場を引き出したといえます．そこで，元に戻って，電磁場が与えられたときに，閉曲線に沿った位相変化を計算すると，(4) 式が出てくるというわけです．

3.3 量子化されたモノポール

さて，非可積分位相をとりこんだ波動関数なるものは，それ自身意味がないが，これを認めることにより奇妙な結果が帰結されます．それが量子化されたモノポールです．その鍵になるのが波動関数の “ノード（節）” の概念です．それは，波動関数がゼロになるところ，つまり，$\psi(x,y,z)=0$ をみたす点の軌跡です．ψ は複素数であるからそれは実部と虚部の 2 つの関係式（曲面を形成する）$\mathrm{Re}\psi=0, \mathrm{Im}\psi=0$ になるので，この 2 つの曲面の交点として曲線ができて，これが “ディラックの紐” と呼ばれます．この紐は，モノポールのつくる磁場のもとになるベクトルポテンシャルが発散する所で，“特異線” というべきものです．実際，原点におかれた磁荷 g をもつモノポールの場合，$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{g\boldsymbol{r}}{r^3}$ の解で，このような特異線をもつものとして，極座標成分を用いて書くと，

$$\begin{aligned} &A_r = 0, \quad A_\theta = 0, \\ &A_\phi = \frac{g}{r\sin\theta}(K - \cos\theta) \end{aligned} \tag{8}$$

が得られます．ここで，K は積分定数で，この選び方は，ちょうど，ゲージのとり方に対応しています．いま，$K=\pm 1$ と選ぶと，$K=1$ のときには，$\theta=\pi$ の所で，$\boldsymbol{A}$ は発散し，$K=-1$ のときには，$\theta=0$ が特異線になります．つまり，原点から，北極（南極）を結ぶ線がディラック紐になります．2 つの間は，ゲージ変換，$\boldsymbol{A}(+)=\boldsymbol{A}(-)+e\nabla\phi$ で結ばれます．さて，このベクトルポテンシャルに対応するディラック因子は，

$$\Phi_{\mathrm{D}}(\pm) = \exp\left[i\frac{eg}{c\hbar}\int_C \{(\pm) - \cos\theta\}d\phi\right] \tag{9}$$

と計算されます．これは波動関数の位相と見られるので，波動関数が意味をもつためには，それが特異線を含むと困る．そこで，うまく特異線をかわすように積分を行えばよいと考えられます．実際，この積分をストークスの定理によって面積分に直すことでこれは実行できます．つまり，C として，その向きを特異線を含まないような曲面の縁になるようにとればよい：実際，北極を含む曲面を S，南極を含む曲面を $\tilde{S}$ とすれば，次の 2 通りの選び方があります：

$$\begin{aligned} \Phi(+) &= \exp\left[i\frac{eg}{\hbar}\int_S \sin\theta d\theta d\phi\right], \\ \Phi(-) &= \exp\left[-i\frac{eg}{\hbar}\int_{\tilde{S}} \sin\theta d\theta d\phi\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

ところが，これらは物理的には区別のつかないものであるから，等しくおいて，

$$\exp\left[i\frac{eg}{c\hbar}\int_{\tilde{S}^2} \sin\theta d\theta d\phi\right] = 1. \tag{11}$$

この積分は，ちょうど 2 次元球面の面積となっているので，これから，ディラックの量子条件，

$eg = c\hbar\frac{n}{2}$ が帰結されます．なお，この量子条件は，ファイバーバンドルの議論を用いてもっと厳密に導かれます[1)]．

3.4 スピンの量子化

スピンの大きさが，ディラック量子化と同じ機構で得られることを示しましょう．球面を位相空間と見なして，そこでのBS因子を与えることがアイデアです．この位相空間（ブロッホ球と呼ばれる）が通常の平坦な位相空間と違うのは，閉じていることです．しかし，幾何学的な構造としては同じ構造をしている面もある．BS因子は，今度は球面の面積要素となるので，

$$\Gamma(C) = J\int \sin\theta d\theta \wedge d\phi. \tag{12}$$

ここで，J はスピンの大きさです．あるいは，これのもとになる1次微分形式は，

$$\omega = J(k - \cos\theta)d\phi. \tag{13}$$

特に，ブロッホ球の上で，閉じた経路 C を考えると，指数関数の肩にのせることにより，$\Phi_{\mathrm{S}} = \exp[i/\hbar\Gamma(C)]$ と書かれます．この Γ は，モノポールのつくるベクトルポテンシャルによる位相とまったく同じものです．$k = \pm 1$ に選べば，この2つの間はゲージ変換：$\omega \to \omega + id\alpha$ で結ばれます．そこで，ディラック量子化とまったく同じ手続きで，

$$\int_{S^2} d\omega = 2n\pi \tag{14}$$

が得られます．ここで，n は正の整数です．これは，単に，$2J = n\hbar$，つまりスピンの大きさは，整数または半整数をとるという事実がこれで確認されたことになります．いいかえれば，スピンの大きさが，位相不変量で説明できることがわかりました．

4. 経路積分：位相（phase）と位相（topology）

BS因子は，作用積分を指数関数の肩にのせたものとして表せるわけですが，この考えを一般化したものが経路積分の考えにつながります．それについてざっと触れておきます．経路積分は，作用積分を位相とする位相因子を，すべての経路について足しあげるという形で与えます．以下では，これを少し変わった形で述べます．

まず，量子的作用原理（変分原理）について説明します．古典力学の作用原理はラグランジアンの時間積分としての作用関数に対する停留条件が運動方程式を与えるというのですが，これを量子力学に転用できるというのがその内容です．アイデアは，大雑把にいえば，シュレーディンガー方程式が変分原理の結果として導かれるような作用関数をつくれるという事実です．それは，

$$S = \int_{t'}^{t''} \langle \Psi(t)| i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} |\Psi(t)\rangle dt \tag{15}$$

で与えられます．変分 $\delta S = 0$ によって，シュレーディンガー方程式が出てきます．この作用関数から，経路積分

$$K = \int \exp\left[\frac{iS}{\hbar}\right] \prod d\mu(\Psi) \tag{16}$$

が構成できます．ここで，$|\Psi\rangle$ は連続パラメータ Ψ でパラメトライズされた状態で，適当な測度が定義できると仮定します．ここでは詳細は述べられませんが，具体的には非直交な超完全系（over-complete set），あるいは一般化されたコヒーレント状態をとれば実現できます[3)]．この経路積分表示の"古典"極限をとれば，停留位相の条件から量子変分原理が帰着されます．その結果，パラメータ空間における無限個の経路に関する和（積分）は，一つの"古典的経路"に局限されます．それは，$K_{\mathrm{cl}} \sim \exp[\frac{i}{\hbar}S]$ となり，作用関数 S の第1項，

$$\int_{t'}^{t''} \langle \Psi(t)| i\hbar\frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle dt \equiv \Gamma \tag{17}$$

はいわゆる幾何学的位相にほかなりません．特に，$|\Psi\rangle$ を断熱定理における量子数，n をもつ状態におきかえれば，それはベリーの位相となります．幾何学的位相は量子力学のトポロジカルな様相を端的に表明していると考えられています．たとえば，よく知られているように，断熱準位の準位交差の構造が，モノポールと同じベクトルポテンシャル（ゲージ場）と同様の構造をもつという事実は典型

的な例です．位相（トポロジー）が位相（phase）によって，まさに担われているわけです[4]．

5. 位相的欠陥の量子

今度は少し見方を変えて，波動関数の零点に起因するトポロジー的対象物というものに注目します．ディラック因子の背景には，ディラックの紐が現れて，それは波動関数がゼロをとる点の軌跡で特異点の集合となり，いわば除去すべき対象と考えられたわけですが，以下ではこの零点が物理的な実体として実現される場合を考えます．

5.1 ボーズ流体における欠陥

最初に，(超流動) ボーズ凝縮体における量子渦をとりあげます．これは複素場を用いることによって，渦の構造が明瞭な形で実体として表現されます．具体的には，非線型シュレーディンガー方程式の安定な特殊解として構成されますが，その詳細は他書にゆずり，ここでは渦の量子的運動について略述します[5]．ボーズ凝縮を，ボソン場演算子 $\hat{\phi}(x)$ を用いたコヒーレント状態から量子作用関数 (15) をつくると，対応するラグランジアンは

$$L=\int\left[\frac{i\hbar}{2}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t}-\mathrm{c\cdot c}\right)-H\right]d^2x \quad (18)$$

となります．ϕ は，ボーズ凝縮を表す秩序変数という意味をもちます．ここで，幾何学的位相に関する部分を正準項と呼び，L_{C} と書きます．$H\equiv H(\phi,\phi^*)$ でハミルトニアンの期待値です．以下において，2 次元空間における超流体を考えて，そこに現れる渦をとりあげます．秩序変数を，密度 ρ と位相 F によって，

$$\phi(x,t)=\sqrt{\rho}\exp\left[\frac{i}{\hbar}mF(x,t)\right] \quad (19)$$

のように表します．渦の位置がとりこまれているような波動関数を考えて，それに関する運動方程式をつくります．簡単のために，渦が 1 個だけある場合を考えます．密度は，渦の中心位置 $\boldsymbol{X}(t)=(x_0(t),y_0(t))$ として，そこでゼロになるような分布をもつものをとります：$\rho(x,t)=\rho(x,\boldsymbol{X}(t))$ また，位相 F として，

$$F=\mu\tan^{-1}\left(\frac{y-y_0(t)}{x-x_0(t)}\right)\equiv\Theta$$

と選びます．つまり，渦の中心 $\boldsymbol{X}(t)=(x_0(t),y_0(t))$ から計ったベクトル $\boldsymbol{x}=(x,y)$ の極角です．これで，ラグランジュ関数を ρ,F で表すと，

$$L_{\mathrm{C}}=\int m\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}dt. \quad (20)$$

ここで，$\boldsymbol{v}=\nabla\Theta$ は，渦のつくる速度場です．このラグランジアンから，渦中心の運動方程式を導くと，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{\mathrm{C}}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)-\frac{\partial L_{\mathrm{C}}}{\partial\boldsymbol{X}}=\frac{\partial H_{\mathrm{eff}}}{\partial\boldsymbol{X}} \quad (21)$$

となり，左辺は，

$$\left[\int\{\nabla\times(\rho\boldsymbol{v})\}_z d^2x\right]\left(\boldsymbol{k}\times\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right) \quad (22)$$

が導かれます．ここで，$\boldsymbol{k}$ は (x,y) 平面に垂直な単位ベクトルです．この積分の中は，ベクトルの回転にほかならず，面積分の中はちょうど渦度に比例しているので，この事実に注意するとさらに簡単化できます．積分領域は 2 次元平面全体にわたるので，渦を中心とする大きな半径の円にとると，ストークスの定理より円周上の線積分に直せます．そして，渦の中心から離れていることから密度は一定と見てよいので，

$$\int\{\nabla\times(\rho\boldsymbol{v})\}_z d^2x=\rho_0 2\pi\mu \quad (23)$$

となります．上の正準項の計算において，渦の幾何学的形状の具体的な形を使っていないことに注意します．これは，正準項のトポロジカルな性格を反映しています．まとめると，運動方程式は，

$$m\rho_0\mu\left(\boldsymbol{k}\times\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right)=\frac{\partial H_{\mathrm{eff}}}{\partial\boldsymbol{X}}. \quad (24)$$

この式は，$(x_0(t),y_0(t))$ を正準変数とみたてれば，“正準方程式” に対応するものと見られます．ただし，渦 “電荷” μ がつくことに注意します．対応するラグランジアン（作用関数）は，

$$L_{\mathrm{eff}}=\frac{\mu}{2}\left(y_0\dot{x}_0-x_0\dot{y}_0\right)-H_{\mathrm{eff}} \quad (25)$$

になります．ここで，第1項から，BS因子がつくれて，それによって渦の運動の量子化が与えられます[6]．

5.2 量子ホール流体における欠陥

次に，強磁場中の2次元電子系の基底状態付近に現れる素励起としての位相欠陥を考えます．これは磁場のミステリアスな面が顕在する典型的例と考えられます．ここで，2次元強磁場中の電子系の基底状態の波動関数（いわゆるラフリン–ジャストロウ波動関数）が出発点になります[7]．2次元であることの特殊性から，それは複素変数関数で書かれます：すなわち，

$$\Psi_0=\prod_{i>j}(z_i-z_j)^m \exp\left[-\frac{1}{4}\sum_i |z_i|^2\right]. \quad (26)$$

この波動関数のよってくるところの詳細を述べる余裕はありませんが，それは，非圧縮量子液体を記述するのに最も適したものです．$m=1$ のときは，最低ランダウ準位がパウリ原理によって占められた状態になります．$m>1$ のときは，最低準位が，$\nu=1/m$ だけ占有された状態になります．この状態に関して磁束の勘定をすると（つまり，1個の電子に，m 個の磁束量子 hc/e が付着しているという描像），平均の電子密度は，

$$\rho_0=\frac{eB\nu}{ch} \quad (27)$$

となることがわかります．渦の基本的なアイデアは，“波動関数の零点である” ということでしたが，いまの場合も基底ホール状態 Ψ_0 から零点をつくり出すことができます．1個の渦を考えて，その中心位置を，$z_0=(x_0,\ y_0)$ とします．このような渦の存在を許容する試行関数として，次のような形を仮定するのが最も簡単です：

$$\Psi=\prod_{k=1}^{n}(z_k-z_0)\Psi_0(z_1\cdots z_n). \quad (28)$$

これから，零点は $z_k=z_0$ にあることが直接的に見てとれます．ここで，z_0 が時間的に変化する場合に，その運動方程式を決定するために，ここでも量子作用原理を用います．ラグランジアンは，

$$L=\langle\Psi|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\hat{H}|\Psi\rangle. \quad (29)$$

これに，(28) 式を代入すると，ラグランジアンは，

$$\int\{\rho(-\dot{\boldsymbol{x}}_0\cdot\nabla\Theta)\}dxdy-\langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle \quad (30)$$

と表せます．ここで，ρ は密度演算子の期待値：

$$\rho=\langle\Psi|\hat{\rho}(z)|\Psi\rangle=\langle\Psi|\sum_{k=1}^{n}\delta(z-z_k)|\Psi\rangle$$

です．この有効ラグランジアンから，ボーズ流体の場合とまったく同じく，積分記号下での微分を用いると，初等的な計算の結果，

$$\omega\left(\boldsymbol{k}\times\frac{dz_0}{dt}\right)=\frac{\partial H_{\mathrm{eff}}}{\partial z_0} \quad (31)$$

が導かれます[8]．これは，超流体渦の運動方程式とまったく同じ形です．ここで，

$$\omega=\int(\nabla\times(\rho\boldsymbol{v_\nu}))_z dxdy \quad (32)$$

かつ，$\boldsymbol{v}=\nabla\Theta$ は，$z=z_0$ にある渦のつくる速度場です．超流体渦の場合と同じく，ストークスの定理によって，線積分に直して，渦の中心から十分離れた所では，電子密度は一定値 ρ_0 をとることに注意すれば，

$$\omega=2\pi\rho_0=\frac{e\nu B}{c\hbar}$$

が得られます．上の計算から，逆に，この正準方程式を導く有効作用関数は，

$$S_{\mathrm{eff}}=\int[\omega(x_0\dot{y}_0-y_0\dot{x}_0)-H_{\mathrm{eff}}]dt \quad (33)$$

となることがわかります．ここで，これから，BS因子がつくれます．一方，この渦励起は電荷を運ぶことを考えると，これは，C を貫く磁場に対するディラック因子とも見なされます．これら2つのものを等値すると，

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}\omega\oint_C(\boldsymbol{k}\times dz_0)\right]=\exp\left[\frac{ie^*}{c\hbar}\oint_S\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}\right]. \quad (34)$$

すなわち，

$$\frac{\nu eB}{c\hbar}=\frac{e^*B}{c\hbar}.$$

これから，$e^* = \nu e$, つまり，素励起は正の分数電荷，e/m をもつことがわかります．この結果自身は，直感的（原始的？）な考察からもわかります．すなわち，$z = z_0$ に穴が開くということは，そこを磁束量子 ch/e が貫通しているので，それは電子 1 個あたり m 本の磁束量子が付着していることを考慮すると，欠損 1 本あたりの電荷は $+e/m$ と見られるというわけです．

■ 6. 結び ■

ここで述べた内容は，プランク定数をダシにして，BS 因子，およびディラック因子の概念，および，それを一般化した話に終始してしまいました．歴史的にも，かつ現代的な意味においても，プランク定数によって支配される量子現象のトポロジー的内容を具体化する最も簡単なものと思われたからです．もちろん，これが唯一のものでないことはいうまでもありません．結果的に長々と式を使って展開しただけになってしまいました．深い観点からの議論などは筆者の能力の及ばざるところです．

プランク定数の起源に関する糸口は結局見つかりそうもありません．ディラックの量子化は，電気と磁気の素量をプランク定数と関係づける神秘的な関係式ですが，安易に考えれば，これをプランク定数の説明になっているともいえるかもしれません．しかし，モノポールというわけのわからない実体を前提としなければならないので，これはよくわかっているものを，難しい対象で説明するいうことで物理の精神とは反します．

ここでは触れられませんが，微細構造定数もプランク定数の起源の候補になるかもしれません．そこでは，電荷と光の速度を基本定数として，それによって，$\hbar$ が表現できるからです．そこで，137 分の 1 という数字に何かトポロジー的意味をつけることができればよいと考えられます．無茶な空想をするならば，プランク定数だけを担うソースを考えて，（プランクトン？？！！）それのつくる場を考えることもできるかもしれません．スピンの大きさは，プランク定数の次元をもつので，それをプランク荷を担うものと考えて，電子などは，電荷だけを担う“粒子”とプランク荷だけを担う粒子の複合体だと….

結局，プランク定数などの自然界の普遍常数は既存の理論の枠内では合理的に説明できるものではなく，宇宙の起源と関係したものかもしれません．宇宙の構造といったものにはトポロジー的なアイデアがいかにも出てきてもおかしくはないからです．

最後に，仮にプランク定数をそのようなもので説明できたところで，完成された壮大なる量子力学の体系にはいささかの影響もないことは確実です．そのような説明が，可能であるとすれば，“量子力学の向こう”へのまさに糸口になるべきものであると思います．“量子力学は理解されていない”ということは，碩学たち（たとえばファインマン）の信念のようです．また，観測理論から派生した問題があいかわらず賑わっているようです．しかし，そこまでいかなくても量子力学の枠内でミステリアスな現象はまだまだあるのではないかという気がします．

以上で，牽強付会の解説を終了します．なお，文献に関して必要最小限のものしか引用していません．ご容赦願いたいと思います．

参考文献

1) T. Eguchi, P.G. Gilkey and A.J. Hanson, *Phys. Rep.* **66** (1980) 213.
2) 倉辻比呂志,『トポロジーと物理』, 丸善, 1995.
3) H. Kuratsuji and T. Suzuki, *Phys. Lett.* **90B** (1980) 19.
4) “Geometric Phases in Physics”, eds. A. Shapere and F. Wilczek, World Scientific, Singapore 1989.
5) H. Kuratsuji, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 1746.
6) H. Kuratsuji and H. Yabu, *J. Phys.* **A29** (1996) 6503.
7) a) 吉岡大二郎,『量子ホール効果』, 岩波書店, b) 青木秀夫,『分数量子ホール効果』, 東京大学出版会.
8) H. Kuratsuji, 未発表原稿.

（くらつじ・ひろし，立命館大学理工学部）

書評 力学ステーション

時間と空間を舞台とした物体の振る舞い

小林幸夫著，B5 版，254 頁，本体 2500 円，森北出版



本書の書名『力学ステーション』とは少々聞き馴れない言葉である．はしがきには「力学の考え方を知るための電車」に乗って旅立つときのガイドブックと記されている．広辞苑によるとステーションの説明として① 停車場，駅，② ある仕事を引き受ける拠点，の 2 つがあがっている．①には東京ステーション，大阪ステーションなどの用例があるが，電車が現れることから察するに著者は①の意味でステーションを使っているように見受けられる．

本書を一読し評者はむしろ②の用法が本書にふさわしいと思った．キーステーション，サービスステーション，ニュースステーションなどが②の例だが，力学ステーションとは「力学の拠り所」というふうに評者は解釈している．題名はともかく，目次を紹介すると

0. プロローグ，1. 物理量の測定の仕方，2. 運動の記述の仕方，3. 力，4. 運動の基本的な量，5. いろいろな力学現象，6. 剛体の運動，7. 非慣性系で観測した運動の法則，8. エピローグ

となっている．5 では放物運動，空気抵抗，摩擦，円運動，単振動，減衰振動，衝突，惑星の運動など，6 では剛体，慣性モーメント，角運動量など，7 ではコリオリ力，遠心力などがとり上げられ，力学の主要なテーマは網羅されている．「力学の拠り所」と書いたのはこのような事情による．

副題に「時間と空間を舞台とした物体の振る舞い」とあるが，著者は次の 3 つの命題 ① 並進運動の勢いを「時間の観点」から見るとき：「運動量は，外界から受けた力積の分だけ変化する」 ② 回転運動の勢いを「時間の観点」から見るとき：「角運動量は，外界から受けた力積のモーメントの分だけ変化する」 ③ これらの勢いを「空間の観点」から見るとき：「運動エネルギーは，外界から受けた仕事の分だけ変化する」を議論の出発点としている．本書の各所で，陰に，陽にこのような観点が強調される．

カバーの裏表紙に「この本は，中学理科・高校物理から大学の力学にスムーズにつながるように配慮したガイドブックです」といった注意書がある．このコメントはまさにその通りで初学者でも内容が把握できるよう十分考慮されている．最近の中学・高校では実験時間を削減する傾向がある点に鑑み，有効数字に関する記述が最初のほうにあるが，これは当を得た配慮であろう．本書中の図やイラストはプロではなく著者自身が描いたそうである．本文の説明の部分には著者の手書きがそのまま印刷されていて，黒板を見ながら講義を聞いているような印象を受ける．本文の左右の余白欄は訳注にあてられ，読者への参考としての機能を果たしている．評者として，力学をじっくり学びたい初学者に本書をお薦めしたい．

最後に本書中の 1 つの例題と解答欄中のミスプリを指摘しておきたい．摩擦の無視できる机上で，水平に置いたばね（ばね定数 k）の両端にそれぞれ質量 m_{A}，質量 m_{B} のおもりをとり付ける．自然長からばねを長さ a だけ延ばしてから静かに手を離す．ばねが自然長になったとき，2 個のおもりの速さ $v_{\mathrm{A}}, v_{\mathrm{B}}$ を求めよ，という問題である．

運動量保存則から

$$m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{B}}v_{\mathrm{B}} = 0$$

となり，また力学的エネルギー保存則から

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A}}^2 + \frac{1}{2}m_{\mathrm{B}}v_{\mathrm{B}}^2 = \frac{1}{2}ka^2$$

が得られる．上の両式から

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A}}^2 = \frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}\frac{1}{2}ka^2,$$

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{B}}v_{\mathrm{B}}^2 = \frac{m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}\frac{1}{2}ka^2$$

が導かれる．ここまでは正しいが，$v_{\mathrm{A}}, v_{\mathrm{B}}$ を求めるため，平方根をとった結果にミスプリがある．次の機会に修正を願う次第である．もし入学試験であれば，正解ではないから減点の対象となる．自戒をこめ，ケアレス・ミスのないよう十分注意したい．

阿部 龍蔵（東京大学名誉教授）

書評 ファイナンスの確率解析入門



藤田岳彦著，A5 版，256 頁，本体 4800 円，講談社

著者は，12 年前に京都大学から一橋大学に移ってこられて以来，現在数理ファイナンスと呼ばれているデリバティブ価格理論の研究と教育に興味を持たれ，実績を積み重ねてこられた．その成果と経験を踏まえて，経済・商学部上級の学生から修士課程の学生にわかる教科書として本書を執筆された．この分野が新しい分野であるために国内の専門家が少なく，そのためか翻訳書が多い．実際に研究を行っている専門家によって日本語で書かれたよい教科書が少ない中で，本書はこの分野を見通しよくきちんと理解しようとする人にとっては大変よい教科書となるだろう．

序文にあるように，大学 1，2 年程度の基礎数学の知識を確実にモノにした読者を対象とし，習得が難しいと言われる測度論的確率論の使用を避けて，直感的かつ具体的な意味がわかるように心がけて本書を書いておられる．また，デリバティブ価格理論の習得と応用には計算が重要であることを鑑みて，例を挙げ，計算の途中がわかるように詳しく書き，その上で，練習問題（答付き）を多く収録しておられる．入門的読者は，第 1 章からじっくり時間をかけて，面倒がらず，自分の手で数式を書き，計算を行うことをお勧めする．これを第 1 章，第 2 章，と順次積み重ねることにより，確率変数，確率過程，期待値，確率測度といった確率解析の記号と形式に慣れていくことと確信する．

：第 1 章「ランダムウォークとマルチンゲール」は，離散的時間のランダムウォーク，条件付期待値，そしてマルチンゲールについての解説である．ここで，マルチンゲールと条件付期待値をがっちり理解するとよい．第 1 章 1.5 節の離散伊藤公式は，他の文献にはあまり見かけないので，入門者ではない読者にも目新しく思われるだろう．

：第 2 章「離散モデルのデリバティブ価格付け理論」では，基本概念である“無裁定”について説明し，2 項モデルのデリバティブ価格理論を 1 期間と T 期間，それぞれについて解説している．第 2 章 5 節では，離散時間モデルから連続時間モデルへの橋渡し的な説明が行われている．ここでブラック・ショールズの偏微分方程式が初登場する．

：第 3 章「ブラウン運動とマルチンゲール」と，第 4 章「確率微分方程式」は，第 1 章の連続時間版であるが内容がグンと豊富になる．第 3 章のブラウン運動，確率積分，伊藤の公式についての解説を経て，第 4 章では，確率微分方程式を例題を添えて説明し，コルモゴロフの偏微分方程式，ギルサノフ・丸山の定理を解説して，評者が“マルチンゲール流”と呼ぶデリバティブ価格理論の準備を終える．しかし，この章では，評者が偏微分方程式流と呼ぶ価格理論との関連も説明されているので，これまで，偏微分方程式流だけに慣れてこられた方々，特に物理学出身のデリバティブ専門家にはよい解説であろう．確率過程の専門家である著者の見通しのよい理解を踏まえた，しかし難しくは書かない，素晴らしい記述があちこちに見られるが，特に，第 4 章 3 節の偏微分方程式の確率表現とファインマン・カッツの定理の証明は，簡潔でよい．ここまでの準備を経て，第 5 章「連続モデルのデリバティブ価格理論」では，ブラック・ショールズのオプション価格式が導かれる．第 4 章で対応を付けた 2 つの流儀“マルチンゲール流”と“偏微分方程式流”の価格理論が 1 節と 2 節でそれぞれ説明されている．3 節と 4 節では，他の入門書ではあまり書かれないエキゾチック・オプションの解説がなされている．著者自身の研究成果を反映して，通常のオプションであるプットやコールではないエキゾチック・オプションの解説がある．この中で，日本から発信した日本オリジナルであるオプション（アルファ・パーセンタイル・オプション，江戸っ子・オプション）の解説がある．読者は，金融工学研究は輸入ばかりでなく，日本国内でも研究されていることを知って，研究に参加していただけるように願いたいものです．これらについては，著者が昨年パ

り，ニューヨークのセミナーとコンファランスで講演し，聴衆から人気をとったものである．5節は，基準財の価格であるニューメレールとその変更についての説明である．これは金利モデルで多少高度な議論，あるいは，計算展開などで利用されるが，次の章ではこれを使うところまで話が展開されない．

3節以降の内容は，ここ10年ほどの間に発展・定着したものである．マルチンゲール流のデリバティブ価格理論もここ19年ほどの間に整ってきたものである．ブラック・ショールズのオプション価格式が1973年の論文で提示されて以降，もうすでに30年が経過するが，本書ではその間の研究成果をかいつまんで簡潔に見ることができて，専門家にとってもよい読み物であろう．

：第6章「確率金利モデル」では，ブラック・ショールズのモデルでは定数と仮定された金利が不確実に変動するモデルの解説を行っている．実務界でもアカデミックな世界でも重要とされる基本モデルの説明を行っている．イールドカーブ，フォワードレートの説明をした後，フォワードレートから議論を建てるヒース・ジャロー・モートンの金利モデルを説明し，さらにその中で，Ho/Leeモデル，バシチェク・モデル，コックス・インガソル・ロスモデル（CIRモデル）という基本的なショート・レートモデルを解説している（モデルを作った人の名前がモデル名として付いている）．その上で，ゼロ・クーポン債券の価格式を導いている．金利が変動する世界での数学理論は，内容が豊富で数学も高度になるが，ここで得た基礎があればかなり読み進むことができるだろう．

：第7章「確率の復習」では，大学学部1，2年で習っているはずの確率変数と確率分布の重要事項が，本書で必要なモノについて，復習として例を添えて説明されている．

文系・理系を問わず，金融の学術研究と高度な実務においては，このような確率解析がわかる人が必要とされている．そのような人材を育成するために，評者が所属する研究科修士コース（一橋大学社会人大学院国際企業戦略研究科）では，著者がマルチンゲールを使うデリバティブ価格理論を，評者はリスクレスポートフォリオを作り偏微分方程式を導く価格理論（第5章2節に解説がある）を授業で講じている．授業は同じ学期に並行して行っている．社会人である学生はこれらの授業に参加することにより，上でお勧めしたように，じっくりと時間をかけて自分の手で繰り返し数式を書き，計算を行う訓練を経て（これには努力が必要です），修士課程入学前には自分でも予想しなかった程度にまで理解が進む．学生は喜ぶと同時に勤務先の社内で周囲の人に解説できるようになる，または，しかし，時には，難しいことがわかるやつという印象を与えてかえって浮き上がってしまう，という現象が起きていると聴く．

数学は難しいと言われるが，じっくり時間をかければ理解できるものなので，年齢を厭わず，若い学生も社会人も本書を手にしてデリバティブ価格理論を自分のモノにしていただきたいと思う次第です．

デリバティブ価格の数学理論がわかることだけで，高度な金融業務に就けるわけではありませんが，数理的構造を理解することに加えて，市場の価格データのダイナミックスを分析・理解できるようになれば，かなりよい仕事ができるはずです．米国とヨーロッパでは，この分野を修士レベルで集中的に教育するプログラムが多くの大学で設置されました．日本でも1つ，2つと増え始めています．金融業務に限らず，経済学，ファイナンス，数学の理論研究分野では，研究者養成のための基礎の一部分として，デリバティブの価格理論は，もはや必修でしょう．その意味で，本書は広い範囲で読まれることと期待します．

三浦　良造（一橋大学大学院国際企業戦略研究科）

賭けの数理と金融工学

第8回「賭け」の数理（8）: de Moivre の定理

竹 内 啓

8.1 ベルヌーイ系列

賭けのゲームと結びつけて定義される上期待価格，下期待価格，あるいは上確率，下確率は，必ずしも互いに一致しないし，その意味が捉えにくいところがあるように感じられるかもしれない．

しかしこの定義から実は中心極限定理が導かれるのであり，その論理構造は極めて興味深いものがある．

最初に最も簡単な「ベルヌーイ系列ゲーム」，すなわち $n=1,2,\cdots,N$ に対して，$K_n=K_{n-1}+M_nx_n$ と表され $x_n=\pm N^{\frac{1}{2}}$ となる場合を考えよう．ただしここで賭ける額 M_n は任意の実数値をとるものとする．

このとき $\xi=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ に依存する変量 $y(\xi)$ に対して，その上期待価格，下期待価格は $K_0=0$ として

$$\bar{\boldsymbol{E}}(y)=\inf_{\mathcal{P}}\sup_{\xi}\{y(\xi)-K^{\mathcal{P}}(\xi)\},\quad \underline{\boldsymbol{E}}(y)=\sup_{\mathcal{P}}\inf_{\xi}\{y(\xi)-K^{\mathcal{P}}(\xi)\}$$

と定義され，$\bar{\boldsymbol{E}}(y)=\underline{\boldsymbol{E}}(y)$ のとき，それを期待価格と呼ぶことは先に述べた通りである．

この場合には任意の $i_1,i_2,\cdots,i_k$ に対して

$$\bar{\boldsymbol{E}}(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k})=\underline{\boldsymbol{E}}(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k})=0$$

となることが容易に証明できるから，これから $\varepsilon_i=\pm1,\ i=1,2,\cdots,N$ とすると

$$\bar{\boldsymbol{P}}\{x_1=\varepsilon_1/\sqrt{N},x_2=\varepsilon_2/\sqrt{N},\cdots,x_N=\varepsilon_N/\sqrt{N}\}=2^{-N}$$

であることが導かれる．

すなわちこの場合は，$x_1,x_2,\cdots,x_N$ は $\pm N^{-\frac{1}{2}}$ をそれぞれ確率 $1/2$ でとる，互いに独立な確率変数になる．

この場合は賭けの構造から「確率分布」が一義的に決まってしまい，それは通常のベルヌーイ系列の分布と一致する．そこで

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} x_i$$

とおくと，N が大きければ

$$\boldsymbol{P}\{a < S_N < b\} \simeq \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

となることはよく知られている通りである．

8.2 de Moivre の定理の証明

しかしここでは，上記の定理を通常の確率論の論理を用いず証明する．すなわち

$$\bar{\boldsymbol{P}}\{a < S_N < b\} \simeq \underline{\boldsymbol{P}}\{a < S_N < b\} \simeq \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \tag{8.1}$$

となることを直接証明しよう．

実は (8.1) の代わりに次のことを証明する．

定理 1 任意の有界でなめらかな（すなわち任意の階数の導関数が存在し有界な）関数 U について，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，十分大きい N をとれば，

$$\bar{\boldsymbol{E}}(U(S_N)) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} U(z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \varepsilon,$$

$$\underline{\boldsymbol{E}}(U(S_N)) \geq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} U(z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \varepsilon.$$

(8.1) は上記の U の代わりに区間 $[a,b]$ の定義関数を代入した場合を表している．定義関数は不連続であるが，それをなめらかな関数で一様に近似することができるから，上記の定理が成立すれば (8.1) が導かれることは明らかである．

定理の証明 まず第一式だけ証明すればよいことに注意する．なぜならば第一式で U の代わりに $-U$ を入れれば

$$\bar{\boldsymbol{E}}(-U(S_N)) \leq \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} U(z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \varepsilon.$$

$\bar{\boldsymbol{E}}(-U(S_N)) = -\underline{\boldsymbol{E}}(U(S_N))$ だから

$$\underline{\boldsymbol{E}}(U(S_N)) \geq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} U(z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \varepsilon$$

となる．

第一式を証明するには常に

$$K_N^{\mathcal{P}} \geq U(S_N) - \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} U(z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \varepsilon$$

となるような賭けの戦略 ϕ が存在することを示せばよい．

そこで

$$\bar{U}(S,D)=\int_{-\infty}^{\infty}U(z+S)\frac{1}{\sqrt{2\pi D}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

と定義する．そうして $n+1$ 回目の賭け $(n=0,1,\cdots,N-1)$ において

$$S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n,\quad D_n=1-\frac{n}{N}$$

として，賭けの金額を

$$M_{n+1}=\left.\frac{\partial\bar{U}}{\partial S}\right|_{S=S_n,D=D_n}$$

とする．そうして $U_n=U(S_n,D_n)$ とおけば

$$U_0=\int U(z)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{2}}dz,\quad U_N=U(S_N)$$

となる．ここで

$$U_N-U_0=\sum_{n=0}^{N-1}\left(\bar{U}(S_{n+1},D_{n+1})-\bar{U}(S_n,D_n)\right)$$

と表し，Taylor 展開をすれば，$S_{n+1}-S_n=x_{n+1},D_{n+1}-D_n=-1/N$ に注意して

$$\begin{aligned}&\bar{U}(S_{n+1},D_{n+1})-\bar{U}(S_n,D_n)\\&=\frac{\partial\bar{U}}{\partial S}(S_n,D_n)x_{n+1}-\frac{\partial\bar{U}}{\partial D}(S_n,D_n)\frac{1}{N}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial S^2}(S_n',D_n')x_{n+1}^2\\&\quad+\frac{\partial^2}{\partial S}\frac{\bar{U}}{\partial D}(S_n',D_n')\frac{x_{n+1}}{N}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial D^2}(S_n',D_n')\frac{1}{N^2}\end{aligned}$$

となる．ここで S_n',D_n' はそれぞれ S_nと S_{n+1},D_nと D_{n+1} の間の値である．

ところで $\bar{U}(S,D)$ の定義から

$$\frac{\partial\bar{U}}{\partial D}=\int_{-\infty}^{\infty}U(z+S)\frac{1}{\sqrt{2\pi D}}\left(\frac{z^2}{2D}-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{z^2}{2D}}dz=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial S^2}$$

が成り立つ．また $U(z)$ の導関数が有界ならば

$$\frac{\partial^k\bar{U}}{\partial S^k}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^k}{dz^k}U(z+S)\frac{1}{\sqrt{2\pi D}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz,\quad k=1,2,\cdots$$

も有界になり

$$\frac{\partial\bar{U}}{\partial D}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial S^2},\quad\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial D^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial^3\bar{U}}{\partial D\partial S^2}=\frac{1}{4}\frac{\partial^4\bar{U}}{\partial S^4},\quad\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial S\partial D}=\frac{1}{2}\frac{\partial^3\bar{U}}{\partial S^3}$$

も有界になる．したがって $x_{n+1}^2=1/N$ に注意して

$$\begin{aligned}&\bar{U}(S_{n+1},D_{n+1})-\bar{U}(S_n,D_n)\\&=M_nx_{n+1}+\frac{1}{2N}\left(\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial S^2}(S_n',D_n')-\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial S^2}(S_n,D_n)\right)\\&\quad+\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial S\partial D}(S_n',D_n')\frac{x_{n+1}}{N}+\frac{\partial^2\bar{U}}{2\partial D^2}(S_n',D_n')\frac{1}{N^2}\end{aligned}$$

と表せば，最初の項以外の項はすべて $N^{-\frac{3}{2}}$ のオーダーの項になる．したがって

$$U_N - U_0 = \sum_{n=0}^{N+1} M_{n+1} x_n + O(N^{-\frac{1}{2}}) = K_N^{\mathcal{P}} + O(N^{-\frac{1}{2}})$$

となる．したがって N が十分大きければ

$$K_N^{\mathcal{P}} \geq U_N - U_0 - \varepsilon$$

となる．(証終)

8.3 より一般の場合

上記の定理の証明の中で本質的な所は $x_n^2 \equiv 1/N$ が一定となることにある．このことは x_n が $\pm N^{-\frac{1}{2}}$ の 2 つの値しかとり得ないことを意味し，したがってそれは極めて特殊な場合しか証明していないことになる．

ところで上記の証明をよく見ると，もし

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial D} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial S^2} > 0 \tag{8.2}$$

ならば，$x_n^2 \leq 1/N$ のとき

$$U_N - U_0 \leq \sum_{n=0}^{N+1} M_{n+1} x_n + O(N^{-\frac{1}{2}})$$

となるから

$$\limsup_{N\to\infty} \bar{\boldsymbol{E}}(S_N) \leq \int U(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

となることがわかる．

したがって，x_n が区間 $[-N^{-\frac{1}{2}}, N^{\frac{1}{2}}]$ の任意の値をとるとき

$$\lim_{N\to\infty} \bar{\boldsymbol{E}}(S_N) = \int U(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

となることが表される．なぜならば，特に $x_n = \pm N^{-\frac{1}{2}}$ ならば

$$\lim_{N\to\infty} \bar{\boldsymbol{E}}(S_N) = \int U(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

となるから，x_n のとる範囲がより広ければ

$$\limsup_{N\to\infty} \bar{\boldsymbol{E}}(S_N) \geq \int U(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

となるからである．条件 (8.2) が成り立つ一つの十分条件は，$U(S)$ が凸関数となることである．なぜならばこのとき

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} = \frac{\partial^2}{\partial S^2} \int U(z+S) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2D}} dz = \int \frac{\partial^2}{\partial S^2} U(z+S) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2D}} dz$$

で，被積分関数は常に非負になるからである．

しかしこの場合一般には

$$\lim_{N\to\infty} \underline{\boldsymbol{E}}(U(S_N)) = \int U(z)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

は成り立たない.

8.4 *U* が凸でない場合

U が凸でない場合には，面倒になる.

上記の証明から，次のことが言えることがわかる．もし $S, D > 0$ に関して何回でも微分可能な関数 $\bar{U}(\theta, D)$ が存在し，条件

$$\bar{U}(\theta, D) > U(\theta), \quad D \to \theta \text{ のとき } \bar{U}(\theta, D) \to U(\theta) \tag{8.3}$$

および

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial D} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta^2} > 0 \tag{8.4}$$

を満たすならば

$$M_{n+1} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta}\left(S_n, 1 - \frac{n}{N}\right), \quad n = 0, 1, \cdots, N-1$$

とおくことにより，$x_n^2 \le 1/N$ のとき

$$U(S_N) - \bar{U}(0,1) \le \sum_{n=1}^{N} M_n x_n + K_n + O(N^{-\frac{1}{2}}).$$

$x_n^2 = 1/N$ のとき

$$U(S_N) - \bar{U}(0,1) = \sum_{n=1}^{N} M_n x_n + K_n + O(N^{-\frac{1}{2}})$$

となるから

$$\bar{\boldsymbol{E}}(U(S_N)) = \bar{U}(0,1) + O(N^{-\frac{1}{2}}).$$

ここで (8.4) の代わりに，より一般的な条件を満たすものを考えよう．$\bar{U}$ が

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial D} \ge \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta} \tag{8.5}$$

を満たすとき $\bar{U}$ は，superparabolic であると言う.

このとき (8.3) および (8.5) を満たす任意の $\bar{U}$ に対して

$$\bar{\boldsymbol{E}}(U(S_N)) \le \bar{U}(0,1) + O(N^{-\frac{1}{2}})$$

となることは明らかである.

そこで与えられた U に対して，条件 (8.3), (8.5) を満たすような U の下限 $\bar{U}^*$ を，U の least superparabolic majorant と言い，$\bar{U}^* = LM_U$ と表すことにする．そのとき，次の定理が成り立つ.

定理 2 $x_n^2 \leq 1/N, n = 1, 2, \cdots, N$ のとき，U が連続で有限区間の外では一定になるならば，$\bar{U}^* = LM_U$ とすると

$$\lim_{N\to\infty} \bar{\boldsymbol{E}}(U(S_N)) = \bar{U}^*(0,1).$$

上記の結論から

$$\lim_{N\to\infty} \bar{\boldsymbol{E}}(U(S_N)) \leq \bar{U}^*(0,1)$$

は明らかである．

$$\lim_{N\to\infty} \bar{\boldsymbol{E}}(U(S_N)) \geq \bar{U}^*(0,1) - \varepsilon$$

が成り立つことを示すには，superparabolic 関数についての理論が必要となるので，Shafer と Vovk の本には詳しく述べられているが，ここでは省略しよう．

また U が一様に有界で連続ならば，LM_U が一義的に存在し，D に関して単調増加，また連続であるとき，それを具体的に作ることによって証明できるが，それも省略しよう．

$\underline{\boldsymbol{E}}(U(S_N))$ は $-\bar{\boldsymbol{E}}(-U(S_N))$ に等しいことを用いて，$\bar{U}_* = -(LM_{-U})$ とおけば

$$\lim_{N\to\infty} \underline{\boldsymbol{E}}(U(S_N)) = \bar{U}_*(0,1)$$

となる．

「上確率」「下確率」については，集合の定義関数は不連続だから，上記の定理は直接は適用できないが，定義関数をなめらかな関数で近似することにより，「上確率」「下確率」を計算することができる．

$x_n = \pm N^{-\frac{1}{2}}$ とすると，中心極限定理により

$$\lim_{N\to\infty} \bar{\boldsymbol{P}}\{|S_N| \geq 0.01\} = 0.992, \quad \lim_{N\to\infty} \bar{\boldsymbol{P}}\{|S_N| \leq 3\} = 0.997$$

となるが，$|x_n| \leq N^{-\frac{1}{2}}$ の場合には数値的な計算により

$$\lim_{N\to\infty} \bar{\boldsymbol{P}}\{|S_N| \geq 0.01\} = 1, \quad \lim_{N\to\infty} \underline{\boldsymbol{P}}\{|S_N| \geq 0.01\} = 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} \bar{\boldsymbol{P}}\{|S_N| \leq 3\} = 1, \quad \lim_{N\to\infty} \underline{\boldsymbol{P}}\{|S_N| \leq 3\} = 0.995$$

となるとされている．

8.5 確率測度との関係

ふつうの確率変数の理論と結びつけると，$|x_n| \leq N^{-\frac{1}{2}}$ の場合には，x_n が $[-N^{-\frac{1}{2}}, N^{\frac{1}{2}}]$ の区間の値をとる任意のマーティンゲール系列となるような確率測度がこの賭けを両立することになるから，このような確率測度 μ の下では

$$\lim_{N\to\infty} \underline{\boldsymbol{E}}(U(S_N)) \le \liminf_{N\to\infty} E_\mu(U(S_N)),$$
$$\lim_{N\to\infty} \bar{\boldsymbol{E}}(U(S_N)) \ge \limsup_{N\to\infty} E_\mu(U(S_N))$$

が成り立つことになる.

そこで例えば, $X_1, X_2, \cdots, X_N$ が互いに独立に, 区間 $[N^{-\frac{1}{2}}, N^{\frac{1}{2}}]$ の値をとり, また期待値が 0 となるような確率変数系列とするとき, $S_N = X_1+X_2+\cdots+X_N$ とすると

$$\liminf_{N\to\infty} P_\mu\{|S_N| \ge 0.01\} \ge 0$$

となる. それは自明であるが, しかし $P_\mu\{X_i = 0\} = 1$ の場合を考えれば, $P_\mu\{|S_N| = 0\} = 1$ であるから, 右辺の下限はこれより大きくできないことがわかる.

これに対して

$$\limsup_{N\to\infty} P_\mu\{|S_N| \ge 0.01\} \le 1$$

は不等式としては自明であるが, しかし $X_1, X_2, \cdots, X_N$ が互いに独立ならば, $V(S_N) \le 1$ となるから, 中心極限定理により

$$\limsup_{N\to\infty} P_\mu\{|S_N| \ge 0.01\} \le 0.992$$

となって上限には到達しない.

同様に

$$\limsup_{N\to\infty} P_\mu\{|S_N| \le 3\} \le 1$$

も自明であるが, この右辺は $X_1, X_2, \cdots, X_N$ が独立変数であるとすれば到達されない.

$$\liminf_{N\to\infty} P_\mu\{|S_N| \le 3\} \ge 0.995$$

は自明ではないが, $X_1, X_2, \cdots, X_N$ が互いに独立とすれば, この左辺の値は 0.997 より小さくならないので, 右辺の値に到達しない.

ここでこのような限界が到達されるような $X_1, X_2, \cdots, X_N$ に関する確率測度を構成できるか否かが問題となる. このことは Shafer と Vovk の本に書かれていないが簡単にはできないように思われる. このことは賭けゲームによる方法によって扱われる問題が, 確率測度によって扱われる場合をほとんど含んでいると同時に, 確率測度によって扱うことが困難である場合も含まれていると言うこともできる.

なお今回の議論は, 例えば $a_{n,N} > 0$, $n = 1, 2, \cdots, N$ が正の定数系列であって, x_n が $\pm a_{n,N}$ の値をとる場合に拡張できる. すなわちある正定数 c が存在して

$$\max_n |a_{n,N}| \le cN^{-\frac{1}{2}}$$

ならば，$S_N = \sum_{i=1}^{N} x_i$ とおくと定理1が成立する．その証明は定理1と全く同様にし，ただ D_n を

$$D_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} {a_{k,N}}^2$$

で置き換えればよい．

同じ条件の下で x_n が区間 $[-a_n, a_n]$ の値をとるものとすれば定理2が証明できる．

ただしここで x_n が有界であることは，本質的な制約条件になっている．x_n が有界でない場合の中心極限定理については次回に述べる．

（たけうち・けい，明治学院大学国際学部）

特　集（2003年6月号）

トポロジーの新世紀

多彩な発想と更なる展開

トポロジーの新世紀　松本　幸夫
トポロジーと非可換幾何学　夏目　利一
トポロジーからカオスへ　林　修平
離散群とトポロジー　大鹿　健一
数論と3次元トポロジー　森下　昌紀
結び目の普遍量子不変量　大槻　知忠
場の理論とトポロジー　加藤　晃史
21世紀の空間像　深谷　賢治

《連載》物理学とは何か　その10　戸田　盛和
賭けの数理と金融工学　その7　竹内　啓
《局所的意味論と現象としての計算⑧》
現象論的計算としての意識：その抽象モデル
郡司ペギオ幸夫・桑村和孝・高橋達二

本体952円

eラーニングとサイバースペース技術
仮想大学参加と遠隔講義の実践教本

［第5回］

遠隔講義で数学を教える

池田　秀人

本稿は，雑誌「Computer Today」に連載されていたが，その雑誌の休刊に伴って，本誌に継続掲載されることになった．それを契機として，数学の遠隔講義に関する筆者の経験や夢を紹介することにした．

❶ はじめに

筆者は，現在は情報科学の分野を主な仕事場としているが，大学院までは数学科に所属していた．当時の数学は，コンピュータとはほとんど無関係であった．数値計算という科目で，電動計算機をわずか使っただけである．しかし，現在のコンピュータの基本原理を考え出したのもフォン・ノイマンという数学者であったし，現在のような情報学科などはなかったから，コンピュータの分野には，電気・電子，物理，化学，数学などの分野から進出した人たちが集まっていた．私もその一人としてコンピュータに関わることになった．

しかし，一方でこれらの基礎分野から進出した人たちは，コンピュータをその基礎分野のために使おうともした．それは当然である．コンピュータは，それ自体目的と考えるには難しい対象で，何かの目的のために使われる道具であるからである．更にこの道具は，非常に広い目的に使える．上記の基礎分野のもつ目的ばかりでなく，あらゆる科学・工学，芸術，ビジネスから娯楽に至るまできわめて広い．

今日eラーニングと呼ばれている教育への応用もコンピュータのテリトリーの一つである．そのeラーニングは，コンピュータ誕生とともに始まり，その技術とともに発展してきたが，今回は，その対象を数学教育に絞り，過去から未来までを考えてみよう．

❷ コンピュータと数学

コンピュータが数学のために広く役立つと認識され始めたのは，数式処理プログラム[1]の開発からだろう．コンピュータはもちろん計算を行う道具だから，数値計算や統計計算という分野ではそれは基本的道具であったが，それ以外の数学分野では，あまり数値そのものを使った計算をしない．数式などの式や記号を用いて，論理を展開することが中心である．したがって，数値を高速にかつ正確に計算してくれる機械は，学問としての「数学」をする上であまり重要ではなかった．それでも多くの数学関係者がコンピュータ科学の方面に進んだが，それは数学が得意とする論理展開が，コンピュータのプログラミングに深い関わりがあっ

この度，姉妹誌「ComputerToday」が休刊したことに伴い，誠に勝手ながら本連載を中途ではございますが，小誌にて引き継ぎ，続行させていただくことになりました．ご愛読のほど，お願い申し上げます．
なお，第4回までの連載は「ComputerToday」2003年3月号までに掲載されております．

たからであろう．

しかしMACSYMA（1959, J. Moses, MIT），REDUCE（1966, A. Hearn, スタンフォード大学），CAMEL（1968, D. Barton, ケンブリッジ大学）などの数式処理システムが発表されて以来，コンピュータは数学の補助的な道具になり始めた．問題を解いたり，式の展開が正しいか検証したりするのに力を発揮した．1987年イリノイ大学のS. Wolframらが開発したMathematica[2~5]は，完成度の高い製品として大成功を収め，コンピュータによる数式処理は一気に広がった．わが国でも，理化学研究所の佐々木らによるGALや富士通研究所のRisa/Asi[7]などがある．この中でも特にMathematicaは，数学教育の中でも使われ始め，高校教育でも取り入れている教師がいる．

もう一つ，コンピュータが数学に貢献したのは，文書清書ソフトウェアである．UNIXフリーソフトウェアとして広まったTEXは，数式を綺麗に印刷する必須不可欠のソフトウェアであった．TEXが出現するまでは，活字を拾って印刷するか，タイプライターのホイールを取り替えたり，上下ピッチを前後移動して添え字などを印刷するという大変手間のかかる仕事であった．ワープロが普及し始めても，まだ数式の記述のためには十分ではなかった．TEXが出現して，数学論文の書き方は驚くほど変わった．自分で活字印刷に近い論文が印刷できるようになったからである．

また，1990年代の後半になって，Webページに数式を書きたいという要求が出てきた．これまで述べてきた「独習型eラーニング」では，テキストをWebページで作らなければいけないからである．Webページ上の数式表現をするためには，数式表現用マークアップ言語が必要となる．MathML[8,9]は，このような目的を果たすXMLの応用の一つとして定義されている．

TEXやMathMLは，複雑な数式をタグ付言語で表現する．しかし，このタグを覚えるのは大変であるし，そのタグの組合せとして書いた数式が果たして書きたいものになっているかどうかは，それを解釈し，表示するソフトウェアに食わせてみなければわからない．これではなかなか使いにくい．これらのソフトウェアは数式エディタと呼ばれる．タグ付言語は一般のテキストエディタでも書けるが，効率の悪いことこの上ない．数式をもっと直感的に入力するという課題は，既に1980年代から取り組まれており，製品としてMathSoft社のMathCad[10]のように数学記号テンプレートを使って数式を簡単に入力できるようにしたソフトウェアが出てきた．また，米国Design Sciences社のMathType[11]を使うと，数式を含んだ書類を印刷したり，MathMLに変換して，数式を含んだWebテキストを作ることができる．しかし，それでもぎこちないという感じから逃れられない．

❸ 数式の手書き入力

数式を清書しようとすると，MathTypeやMathCadでも結構有難いが，これを使って数学をする（？）には，どうも効率が悪い．そもそも数学は，「紙と鉛筆」だけあればできる学問で，それが長所であったはずだから，その長所を捨てて，新しいスタイルに走っても，デメリットばかり目立つのは，宿命かもしれない．

しかし，もし数式が手書きでき，それをコンピュータが理解して，TEXやMathMLのようなきれいな活字フォントに即座に直してくれたら，筆者のように最近字を書くのが下手になった人間にはどんなに便利だろう．TEXやMathMLのタグから開放されたらどんなに快適だろう．また，MathCadのようにテンプレートを探さなくてもよくなる．そして何よりも，思考が中断されなくなるのがいい（タグやテンプレートを探していたら，何をしていたのか忘れてしまうのは，短期記憶が低下し始めた筆者だけであろうか）．

実は，このような夢を追いかけていた研究グループがある．それは，九州大学大学院数理研究科の鈴木昌和教授を中心とするグループである．このグループは，当初視覚障害を持つ学生に数学を教

えるため，数学の点字教科書をコンピュータを使って作成しようという目的で発足したグループだが，その後，開発した数式手書き入力ソフトウェアと数式処理システムを連携したり，数式OCRを開発したりと研究対象の幅を広げ，2002年暮れに行われた研究会[12]では，eラーニングにも乗り出してきた非常に活発で，実践的なグループである．筆者も最初の研究会から出席し，数式の手書き認識ソフトウェアの開発では，微力ながらコントリビューションした．このグループが開発した手書き数式ソフトウェアは，Infty数式Editorという商品名でCAIシステム株式会社から販売されている．

❹ 数学をネット上でリアルタイムで講義する

前置きが非常に長くなったが，本稿の目的は，この手書き数式エディタと，筆者らが開発した多地点遠隔講義用の「マルチメディア黒板」を組み合わせて，ネット講義で数学を教えてみようというものである．

まず手始めに，Infty数式Editor（以下，「Infty」と書く）[13]を開発した鈴木氏が，2002年の研究会で行った模擬講義の様子をお伝えしよう．

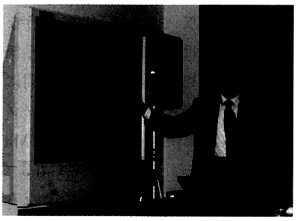


図1　InftyEditorの数式を使って講義する鈴木氏．

この講義は，研究会の場で，あらかじめInftyを使って用意されたファイルを使って行われた．Inftyには，このようなプレゼン用の機能はついていないから，Infty用に開発したプレゼン用ソフトと思われる．画面は，大型のタッチスクリーンである．数学の伝統的な教え方に近く，いくらか数式を出しては説明する．PowerPointのアニメーション機能のようなものである．使われていた数式が比較的簡単なものだったので，まあこれでも無理なく理解できたが，伝統的な講義の方法で数学を習った筆者にとっては，画面をたたく（クリックする）度に，1行分がどんと飛び出してくる数式を頭から目で追いながら，理解していくことに苦痛を感じた．もしもこれがテンソルのような添え字をたくさん含んだ複雑な式だったらと思うと，どうも，この辺りがネックになる気がしてならなかった．

類似のことは，PowerPointのアニメーション機能を使ってもできる．MathTypeを使って数式オブジェクトを挿入しておけば，それを順に表示して説明をすることはできる．連載第1回目で紹介したように同期PowerPointを使えば，多地点へのリアルタイム講義も可能である．Inftyを使えば確かに，MathTypeより効率よくテキストは作成できるが，どうもこれでは筆者の考えるリアルタイム講義には程遠い．

❺ ネット上の数学の講義

筆者は，ネット上でリアルタイムの数学を教える場合，次のような講義の方法を期待している．

(1) **手書き文字・数式入力**：何も書かれていない状態から始め，手書きで数式や文字を声を出して書きながら講義が進められること．表示されるのは，手書き画像ではなく，数式として認識され，きれいなフォントで表現された数式である．

(2) **手書き文字アニメーション機能**：書かれた数式は，遠隔地には，手で書くように徐々に出てくること．ただし，きれいなフォントで出てくるのであり，ホワイトボードに手書きで書かれた画像がそのまま出てくるのではない．

(3) 記録・再生機能：音声と画面の動きを同期した記録が取れ，講義終了後すぐ編集したり，再生したりできること．

(4) 遡及編集機能：途中で質問があったり，遡って説明したいとき，既に書いた数式を含む部分が表示でき，書き出された数式の一部を指定して，複製したり，移行したり，展開したり，削除したり，修正したりできること．

(5) 既成テキストの利用：あらかじめ用意したテキストに追加し，あらかじめ登録しておいた流れに従って講義を進めることもできるが，その流れを手動で変更できること．

(6) マルチメディア機能：図，グラフ，表，写真などが扱えること．

(7) 数式処理ソフトウェアとのリンク：途中で数式処理ソフトを使い何らかの処理をして，その数式を使うことができる．

(8) フォントサイズの自由度：表示フォントサイズを，PowerPoint のように大きいものから，ワープロのように小さなものが自在に使えること．

(9) 多地点音声会話機能：この機能は当然であるが，音声の品質，遅延の少なさ，および同時参加人数（「スケーラビリティ」と言う）が，実用に耐えられること．

筆者が伝統的講義スタイルである手書き入力にこだわるのは，定理の証明の流れを，記憶し，それを学生や同僚の前で滔々と説明して見せられる能力が，数学者あるい数学教育者の必要な能力であって，それができないようなら，数学を教える資格はないと思っているからである．実際，論理が明確になっているものは，かなり複雑でも覚えられる．すなわち，説明しているとき，思い出しながら考えているのであって，単に暗記したものを思い出しているのではない．

このような数学者や教育者に習って，自分も同じことができるようになることが数学がわかるようになるということであると筆者は考えている．実際，前出の PowerPoint のアニメーションを使った方法で講義をしているが，ワープロを使い出してから漢字が書けないようになったのと同様，数学が展開する能力が弱まってきている気がする．数学もやはり「手が覚えている」のかもしれない．

以上で，筆者が期待している数学講義のための遠隔講義環境が理解していただけたと思う．

❻ 遠隔講義で数学を教える実験

それでは，現在まで構築した環境で，実際にこれを行ってみたらどうだろう．

それを紹介するために，まず実験環境を紹介する．

システム全体の構成は，図２のようになっており，マルチメディアボードのサーバとクライアントおよび手書き数式入力プログラム Infty からなる．

マルチメディア黒板システムは，アプリケーション実行 PC 上の画面を他の参加者のスクリーンに画面転送で表示する機能を持ち，多地点音声会議を行うシステムの持つ機能を埋め込んであり，音声で教師と学生とのコミュニケーションを可能にする．Infty で表示すべき画像を作り出し，それをキャプチャして，他のすべてのクライアントに送

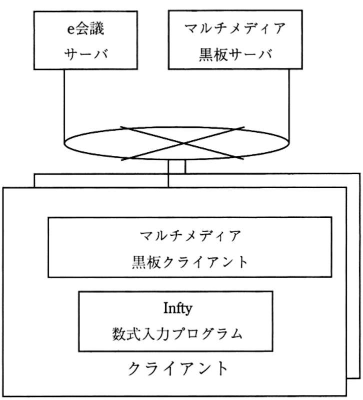


図２　実験システムの全体構成．

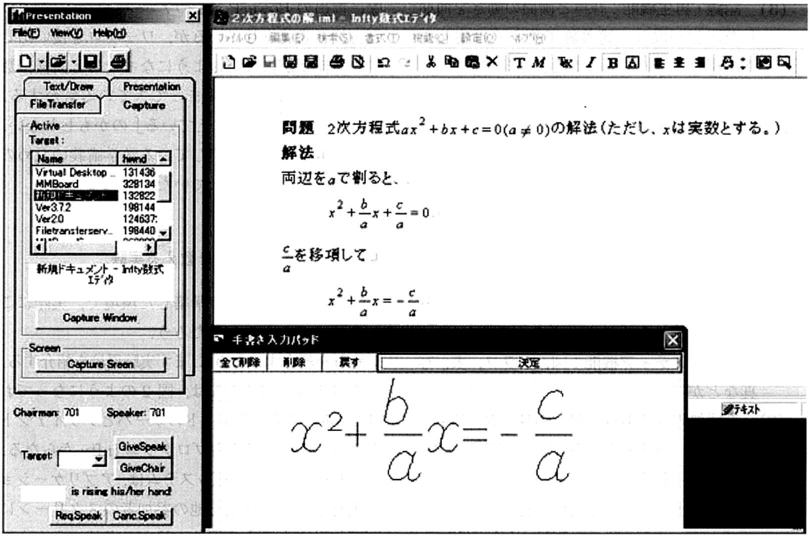


図 3　教師画面.

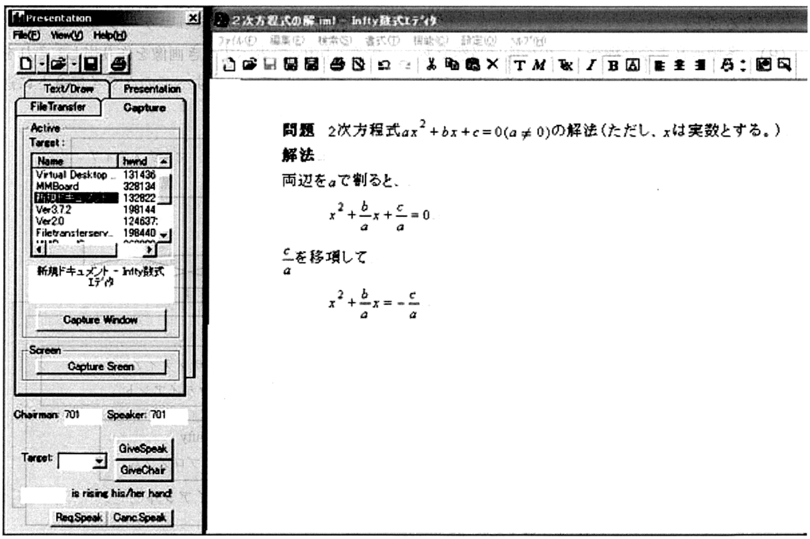


図 4　学生画面.

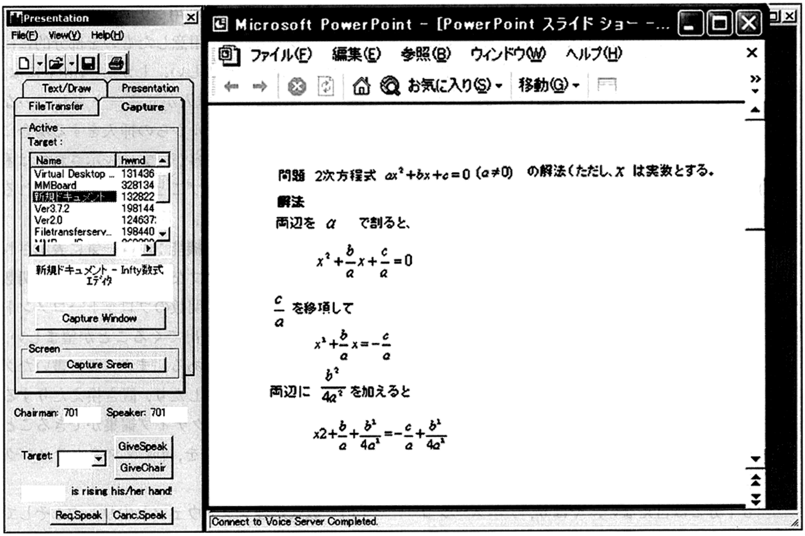


図 5　PowerPoint を使ったときの画面.

りつけることで，黒板上に追加削除をする．そでに書いた画面に，マウス（または，タブレット）で，注意事項などを上書きすることもできる．図 3 は教師側の画面であり，図 4 は学生側の画面である．図 3 と図 4 の左上にあるウィンドウは同じもので，マルチメディア黒板のメインウィンドウである．図 3 の画面を見ている教師は，Infty エディタ・ウィンドウに数式または，文字を書き，それをマルチメディア黒板のキャプチャ画面転送ボタンですべての学生端末に転送する．学生端末では，それを受け取ってキャプチャ画像受信ウィンドウに表示する．Infty の場合，数式は手書きでできるが，文字はキーボードで入力するようになっているため，キーボードとの併用になる．

既に書き込んだ数式の編集は，Infty エディタ画面の編集機能を使ってできる．複製，削除，貼り付けなど，普通のテキストエディタ並みの編集機能はある．マルチメディア黒板では，PowerPoint を同期して操作する機能があり，あらかじめ黒板に書くことをきちんと準備しておけば，アニメーション機能を使っても数学の講義ができる．図 5 は，PowerPoint に MathType を使って数式を書いておき，アニメーションで徐々に出しながら講義したときの画面である．

7 実験評価と今後の課題

以上の実験を，6 節の要求事項の観点から評価すれば，以下のようになる．

(1)　手書き数式・文字入力：数式は Infty で可能であり，慣れるとかなりの複雑な数式も効率よく書けるようになるが，なぜかいくつかの記号がなかなか認識してくれない（たとえば，σ を何度書いても γ や α になってしまう）．また，定理や定義などで文字を書こう

とすると，手書き文字をサポートしていないため，キーボードから入力することになる．タブレットのペンを置き，キーボードを操作し，またペンを持つなどとてもわずらわしい．数式を含む文書の清書ならこれでいいが，リアルタイムで講義をするのは無理である．

(2)　文字・記号の手書きアニメーション機能：この機能は，今回の環境では使えなかった．いや，どんなソフトを組み合わせても現在ではまだ使えない．したがって，いくらか数式を書いてはその画面を送信することになる．マルチメディア黒板は画面全体をキャプチャし，画像圧縮して転送しているが，ADSL などの環境では，まったく問題ない．しかし，参加人数が増えてくると，負荷が大きくなる可能性があり，画像の差分だけを転送するなどの工夫が望まれる．しかし，それだけでも十分とは言えない．やはり，アニメーション・フォント（文字を手で書くように，徐々に文字が書かれていくフォント）の実装が期待される．

(3)　記録再生機能：マルチメディア黒板は，音声の記録再生機能を持っている．しかし，手書き数式・文字の表示タイミングとの同期が取れていない．また，できれば講師のビデオ映像も記録し，自動的に講義再生ビデオが編集されることが望ましい．

(4)　遡及編集機能：Infty は既に入力したテキストを編集する機能を持っている．マウスで位置を指定して，複写，貼り付け，切り取りなど普通のテキスト編集ができる．手書き数式をした位置に挿入もできる．その意味では，数式を含む文書の作成には十分であるが，リアルタイム講義に使おうとすると，移行くらいはサポートしてほしい．現在の機能では，切り出し→挿入（貼り付け）→符号の置き換えと3ステップになってしまう．このような数式特有のテキスト処理が，テキストエディタに付いてほしいと思っている．

(5)　既成テキストの利用：リアルタイム講義とは言っても，既に用意したものを部分的には使えるほうが望ましい．しかし，Infty には，ファイルからの挿入がサポートされていない．また，ファイルからの挿入をする場合には，ファイルの内容が一気に表示されては困る．やはりステップごとに徐々に表示されることが必要である．

(6)　マルチメディア機能：表は一気に表示されてもいいが，グラフなどは，軸→1つの関数のプロット→次の関数のプロット→コメントなどのように順に出てくることが望ましい．アニメーションである．また，既に書いたグラフの一部を削除したり，置き換えたりするなどの，インタラクティブ編集ができることが望ましい．これを，「インタラクティブグラフ」と呼ぼう．

(7)　数式処理ソフトウェアとのリンク：そしてやはり数式処理ソフトとの連携が取れることが望ましい．この連携は，直接共有画面で数式処理ソフトを操作できる必要はない．数式処理ソフトで変形した数式が，カット & ペーストできればいい．もちろんその場合も，手書きアニメーションで表示できることが望まれる．

(8)　音声：音声の品質と遅延は，重要な要件である．この要求に関しては既に開発しているシステムで音質は問題ない．また，遅延も気にならない．更に，参加人数は，サイバーの改善で 1000 人でも耐えられる．

(9)　PowerPoint を使っての講義：PowerPoint はすべての講義の流れをあらかじめ用意しておくことが前提となっているプレゼンテーションソフトウェアである．講義が始まってからできるのは，蛍光ペンで画面の上書きをすることと，別のソフトの起動をし，その後また戻ること，および流れを変更することだけである．画面に出した数式を変更することはできない．追加や削除もできな

い．また，画面が狭すぎて（表示フォントが大きすぎて），長い数式が入りにくいという問題がある．そもそもこのソフトウェアは，講演会などの大会場で大勢の人にプロジェクタなどで画面を拡大して使うことを想定して作られているので，在宅講義などのように一人一人が自分の画面を見ながら進められる講義用ではない．在宅講義などでは，ワープロ画面を共有できたほうがはるかにいい．

以上でわかるように，筆者が理想とする数学の講義ができるようになるには，まだまだもう少し時間が必要である．

8 今後の課題

今回この実験で，これから何をすべきかがわかったということで，大きな成果があったと考えている．今後，以下のような研究・開発の成果の上に，これからの課題を考えることができる．

- **手書き数式のリアルタイム認識**：この困難な課題を鈴木氏率いるグループが解決してくれたことと，
- **遠隔講義システムのアーキテクチャ**（第 4 回目で紹介）：筆者率いるグループが音声環境を含む遠隔講義システムアーキテクチャを確立していること[17]，
- **マルチメディア黒板**：筆者率いるグループのメンバーである安野氏が，プロトタイプとしてのマルチメディア黒板を開発してくれていること[16]，

したがって，今後の課題としては，

- Infty エディタの数学プレゼンテーションソフトウェアとしての強化（文字認識，数式処理機能との連携，多様なフォントサイズのサポートなど）
- アニメーションフォントのサポート
- インタラクティブグラフなどの多様なメディアのインタラクティブソフト化

がある．

筆者が関係するグループ以外の方でも，このような技術に関係する研究に取り組んだり，情報をお寄せいただければ幸いである．

参考文献

1) 下地貞夫：『数式処理』，森北出版，1991.
2) ブラックマン，N.『Mathematica 事典』トッパン 1994 年.
3) Wolfram, S., *The Mathematica Book 3rd edition*, Cambridge University Press, 1996.
4) グレイ，T.・グリン，J.『*Mathematica* ビギナーズガイド』アジソン・ウェスレイ・トッパン 1992 年.
5) MATHEMATICA ブック：システム開発者による Mathematica オフィシャルブック/ スティーブン ウルオフィシャルブック/ スティーブン ウルフラム原著. - 第 4 版. - 東京：東京書籍，2000 年 4 月.
6) MAXIMA ホームページ：http://www.mautexas.edu/users/wfs/maxima.html
7) Noro M., Takeshima T.: “Risa/Asir — Computer Algebra System”, Proc. ISSAC92, 387–396.
8) W3C: Math Working Group: “W3C Math Home”, http://www.w3.org/Math/
9) W3C: Math Working Group: “MathML Specification”, http://www.w3.org/TR/REC-MathML/
10) MathSoft 社：MathCad ホームページ：http://www.mathcad.com/
11) MathType ホームページ：http://www.mathtype.com/jp
12) 研究集会「科学技術分野における電子情報処理に関する研究集会」2002 年 12 月 21–23 日，大分美術館，http://www.home_oita-u.ac.jp/rfukuda/homepage/kenkyukai02.html
13) Infty ホームページ：http://www.caisystem.co.jp/infty/
14) 池田秀人：「表情画像付多地点会議システムの開発」，IPA 情報ベンチャー育成事業，成果報告書.
15) 池田秀人：「海外からのリアルタイム e ラーニング実験」．立命館大学大学教育研究センター紀要.
16) 安野功晃：「サイバースペースにおけるマルチメディア黒板の実装と評価」，2002 年度立命館大学情報学科修士論文.
17) 森野清和：「サイバースペースプラットフォームにおけるソフトウェアコンポーネントのコンカレンターの研究」，2002 年度立命館大学情報学科修士論文．2003 年（2001 年度，先進的教育実践賞受賞論文）.

（いけだ・ひでと，立命館大学理工学部情報学科）

社　員　募　集

編　集：物理・数学系，工学系［サイエンス社］
経済・経営・商学系，法学系［新世社］
①2004年大学(院)新卒者
②既卒者　27歳位まで　経験1年以上

給　与：2003年春大学新卒初任給（22歳基準）　223,800円

待　遇：昇給年1回，賞与年3回，各種社会保険・退職金制度完備，交通費全額支給

勤　務：完全週休2日制；9:30〜17:45

応募書類：履歴書(写真貼付)，成績証明書(新卒者のみ)を下記宛お送り下さい。書類選考の上，面接日を通知します。

問合せ先：〒151-0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷1-3-25
株式会社　**サイエンス社／新世社**　　担当　矢沢
電話（03）5474-8500（代表）

特　集（2003年8月号予告）

虚数のプロフィル

現代科学における役割

本体952円

虚数のイメージ	荒木不二洋
数学における虚数	桂　利行
量子力学的位相	矢吹　治一
場の理論と虚数	新井　朝雄
量子情報·量子コンピュータ　その根底にある虚数の世界	大矢　雅則
宇宙の虚時間	二間瀬敏史
虚数の光	河田　聡
電気工学と虚数	横山　明彦

編集後記

連載を一冊にまとめるのは，書き下ろしの一冊を出すのとはまた別の感慨がある．例えば「数学の未解決問題」は連載開始から4年，こつこつ進めて，いつのまにか一冊の本になっている．一日一日の積み重ねは普段は気付かず，ふとした瞬間に意識される．（平勢）

＊　＊

最近読んだ『リトルターン』という物語の中で，飛べなくなった鳥が自分の翼の影を見てその価値に気づくというシーンがあります．今回取り上げた π や自分の身辺もそうですが，身近すぎて気づかずにいた価値などを発見できるのは，すごいことだと改めて思います．（伊崎）

数　理　科　学　7月号

2003年7月1日発行　　発行人　森　平　勇　三

数理科学編集部
TEL. (03) 5474-8816
FAX. (03) 5474-8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

企画・編集
Staffs：平勢耕介　伊崎修通　内田晴久
Advisers：竹田　直　田島伸彦

発行所　©　株式会社　**サイエンス社**　TEL. (03) 5474-8500（代表）
〒151-0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1-3-25　振替 00170-7-2387　(03) 5474-8600（広告部）

本誌の内容を無断で複写複製・転載することは，著作者および出版者の権利を侵害することがありますので，その場合にはあらかじめサイエンス社著作権担当者あて許諾をお求め下さい．

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁

臨時別冊・数理科学

SGCライブラリ

(The Library for Senior & Graduate Courses)

近年，特に大学理工系の大学院の充実はめざましいものがあります．しかしながら学部上級課程並びに大学院課程の学術的テキスト・参考書はきわめて少ないのが現状であります．本ライブラリはこれらの状況を踏まえ，広く研究者をも対象とし，**数理科学諸分野**および**諸分野の相互に関連する領域**から，現代的テーマやトピックスを順次とりあげ，時代の要請に応える魅力的なライブラリを構築してゆこうとするものです．

装丁の色調は，

数学・応用数理・統計系（黄緑），**物理学系**（黄色），**情報科学系**（桃色），

脳科学・生命科学系（橙色），**数理工学系**（紫），**経済学等社会科学系**（水色）

と大別し，漸次各分野の今日的主要テーマの網羅・集成をはかってまいります．

表示価格はすべて税抜きです

1 カオスと量子物理学
中村勝弘著　本体 1857 円

2 量子力学とは何か
高林武彦著　本体 1857 円

3 シュレーディンガー方程式
仲滋文著　本体 1790 円

4 量子コンピュータの基礎
細谷暁夫著　本体 1857 円

5 有限体と符号理論
内田興二著　本体 1667 円

6 デリバティブの数理
三浦良造著　本体 1333 円

7 複雑系経済学とその周辺
西村和雄編著　本体 1762 円

8 差分方程式講義
広田良吾著　本体 1857 円

9 生命をつくる
中野馨著　本体 1524 円

10 計算物理入門
上田顯著　本体 1381 円

11 エコノミックゲームセオリー
船木由喜彦著　本体 1429 円

12 演習 場の量子論
柏太郎著　本体 1886 円

13 複雑系脳理論
津田一郎著　本体 1429 円

14 探索のアルゴリズムと技法
伊庭斉志著　本体 1695 円

15 はじめての逆問題
チャールズ W. グロエッチュ著
大西和榮・田沼一実・山本昌宏訳
本体 1886 円

16 有限要素法による構造解析事例集
白鳥正樹・三好俊郎編著
本体 1429 円

17 基礎からの力学系
小室元政著　本体 1886 円

18 独立成分分析
甘利俊一・村田昇共編著
本体 1667 円

19 時系列解析入門
宮野尚哉著　本体 1429 円

20 物理数学ノート
佐藤光著　本体 1819 円

21 数学の未解決問題
上野健爾・高橋陽一郎・中島啓共編
本体 1886 円

22 量子論の基礎
清水明著　本体 1819 円

23 微分幾何講義
二木昭人著　本体 1857 円

24 脳の謎に挑む
茂木健一郎編著　本体 1829 円

新刊・近刊

集合と位相への入門
ユークリッド空間の位相
鈴木晋一著
A5／168頁／本体1650円

本書は初学者を対象に主テーマをユークリッド空間にした．斯学を難しく考えず，興味や必要に応じて学べるよう工夫し，問題には詳しい解答を付けた理工系向け好個の教科・参考書である．

線形代数演習［新訂版］
横井英夫・尼野一夫 共著
A5／280頁／本体1980円

例題および各節末の豊富な問題とその詳しい解答により，線形代数学を具体的に理解するための演習書として好評を博した前著に体裁面での改訂を加え，さらなるわかりやすさを追求している．線形代数学を本当に理解しようとする人にはお勧めの一冊．2色刷．

微分方程式演習［新訂版］
加藤義夫・三宅正武 共著
A5／約240頁／予価2000円

実際に微分方程式を使用する学生を対象とした演習書．前著とは構成を少し変え，難解と思われる箇所をわかりやすくし，応用問題を増やしてより親しみやすくなっている．

複素関数概論
林実樹廣・長坂行雄 共著
A5／224頁／本体1600円

関数論は純粋数学から実用的な物理学，工学まで広い応用力をもっている．本書はそれらを考慮し，半期講義用にわかりやすくまとめた．例題や問題を豊富に配置するなど，理工系向け好個の教科・参考書．

代数演習［新訂版］
横井英夫・硲野敏博 共著
A5／232頁／本体1950円

群・環・体とそれらの応用であるガロア理論の演習書として好評を博した前著を改訂．高校数学以外の予備知識は線形代数に限りつつ，基礎的な問題や抽象的概念のイメージ化を助ける問題等を追加して，内容のさらなる充実を図っている．

数値解析入門［増訂版］
山本哲朗著
A5／288頁／本体2000円

種々の数値計算法の基礎を解説して好評を得てきた「数値解析入門」の増訂版．さらに幾つかの現代的数値計算法を取り上げ，解説も平易かつ厳密さを心がけた．学生，技術者，研究者に好適な教科，参考書．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

のご案内

物理学のための応用解析
初貝安弘著
B5／224頁／本体1900円

学部3年前期あたりまでに習得すべき物理科学，工学において必須と考えられる数理的な処理，計算，算術の方法についてひととおり解説．数学的厳密さには拘らないながら，物理科学において通常使う分には十分と考えられる程度の説明は自己完結的に行った．

演習化学熱力学［新訂版］
渡辺啓著
A5／約240頁／予価2000円

長年好評を博してきた「演習化学熱力学」の新訂版．熱力学の化学への応用に重点をおいた演習書．例題は見開きにし，問題解答も詳しくわかりやすい．

オートマトン言語理論計算論I, II
［第2版］
J.E. ホップクロフト 他著／野崎昭弘 他訳
A5／I：352頁／本体2800円
II：約250頁／予価3000円

オートマトン，言語および計算理論の入門書として評価を得ている書の改訂・翻訳版．前著の抽象的な話題が現在どのように使われているか例示．モデル検査アルゴリズム，ドキュメント記述言語など新しい応用がたくさんある．

画像処理
画像表現・圧縮・フラクタル
鎌田清一郎著
A5／192頁／本体1600円

基本的な画像処理技術の考え方から始まり，移動物体の検出，フレーム間予測など動画処理の概念，画像圧縮の基礎と，JPEG，MPEGなどの国際標準化方式を学ぶ．さらに，フラクタルなど画像処理に用いられる基礎知識を概観する．

ソフトウェア工学
プロセス・開発方法論・UML
鈴木正人著
A5／200頁／本体1800円

多様化・複雑化するソフトウェア開発に必要な原理や方法論を学ぶ．構造化分析・設計からオブジェクト指向技術，統一モデリング言語，設計や実装などの手法について解説．

やさしく学べる
pLaTeX 2ε 入門
文書作成からプレゼンテーションまで
皆本晃弥著
B5／256頁／本体2700円

情報処理教育としての講義・演習に使えるpLaTeX 2εの入門書．基本から，数式，表作成，パッケージ，Web，プレゼンテーションへの利用まで解説．複雑な数式も扱えるようにAmS-LaTeXについても紹介している．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

数学関連好評書より(1)

線形代数の基礎
寺田文行・木村宣昭共著／A5／176頁／本体1480円
左ページに解説，右ページにそれに関連した図や小問を配置するように配慮した．高校数学とのつながりにも配慮しわかりやすく解説．２色刷

基礎 線形代数 [新訂版]
洲之内著／田中改訂／A5／192頁／本体1600円
定評ある旧版に，体裁面で大幅な変更を加え，見た目のわかりやすさも追及した．工科系の学生には最適のテキスト．

理工基礎 線形代数
高橋大輔著／A5／208頁／本体1600円
高校での履修状況を考慮して，内容や順序も工夫されている．例題や問題も豊富に配置した，理工系向けの好個の教科・参考書．

基礎課程線形代数
吉野雄二著／A5／240頁／本体1700円
著者の講義経験が生かされ，授業の不足点を補うことができるよう構成された好個の教科・参考書となっている．

微分積分の基礎
寺田・中村共著／A5／208頁／本体1480円
高等学校の「数学II」までの知識で学ぶことができる．例や図を多用したわかりやすい解説．見開き体裁・２色刷．

微分積分概説
長瀬・芦野共著／A5／256頁／本体1750円
まず概説的な形で微分積分の基本的な事柄を述べ，その後あらためて数学的に厳密に考えてみるよう章の配置を考慮した．２色刷．

理工基礎 微分積分学I,II
I: 1変数の微積分 II: 多変数の微積分
足立恒雄著／A5／I: 184頁 II: 192頁／本体各1600円
1変数，および多変数の微分積分について基礎から丁寧にわかりやすく解説．２色刷．

基本微分積分
坂田 泩著／A5／240頁／本体1850円
高等学校における数学の履修度が多様化している現状を考慮しながら，理工系に必須である微分積分を，平易な言葉と豊富な図・例・問題などを用いてわかりやすく解説．２色刷．

数理系のための
基礎と応用 微分積分I, II
金子晃著／A5／Ｉ：256頁／本体1800円
II：280頁／本体1950円
著者の講義経験をもとに，理論に重点を置いた．数理系の学生には最適の教科・参考書．

基礎課程 微分積分I, II
西山享著／A5／Ｉ：208頁／本体1380円
II：136頁／本体1280円
第Ｉ巻では１変数の微積分，第II巻では多変数の微積分と微分方程式を扱っている．２色刷．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

数学関連好評書より(2)

代数入門
東郷重明著／A5／152頁／本体1748円
多くを語るのはたやすく，簡潔に理論の骨格と意味を与えるのは難しい．本書はまさにその様に書かれた本で，代数に進む人に是非一読すすめたい．

数理・情報系のための
代数系の基礎
寺田文行著／A5／144頁／本体1380円
近年の学生の多様化にあわせて，やさしく，かつレベルは落とさないように解説した．

群論入門［新訂版］
国吉秀夫著／高橋豊文改訂／A5／128頁／本体1200円
はじめて群論を学ぶ人のために，群論の基礎となる事項を簡明に解説した，理工系の学生にとって最適の入門テキスト．

位　相
静間良次著／A5／116頁／本体1340円
現代数学の基礎をなす位相について，その考え方と基礎的な事項についてやさしく，かつまた順序よく説き示した入門的テキスト．

概説 微分方程式
中尾愼宏著／A5／168頁／本体1600円
微分方程式の面白さと有効性が伝わるように，広く大学理工系学生を対象に書かれた入門書．具体的な方程式やその解法に重点をおいて解説．

微分方程式概論
神保秀一著／A5／184頁／本体1600円
基本的な微分方程式を中心に計算や考え方をコンパクトに解説．物理の力学的な現象など数多く例を取り上げ，数学的に解析した好個のテキスト・参考書．

微分方程式の基礎と応用
佐藤光著／A5／248頁／本体1600円
広い読者層を想定し，微積の初歩から説き起こし，常微分方程式の定型的な解法を説明．関連した数学の基礎分野の理解が進むよう配慮されている．

微分方程式の基礎
寺田文行著／A5／112頁／本体1200円
高校の新課程と学習の実態に配慮した微分方程式の入門書．具体例を多く用いて解説．完全見開き形式で見やすいことも特徴となっている．

偏微分方程式の基礎と応用
矢吹治一著／A5／256頁／本体1900円
物理現象との関連を基調にした入門テキスト．付録や活字を小さくした箇所で厳密な議論を補足．

ベクトル解析の基礎と応用
渡辺正著／A5／288頁／本体2136円
数学・物理の一体化やコンピュータ利用等も念頭に置き，将来学ぶ専門科目のための基礎を確実に固めることを目指している．大学初年級・高専向．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

数学関連好評書より(3)

ベクトル解析の基礎
寺田文行・木村宣昭共著／A5／120頁／本体1250円
完全見開き形式となっているため見易く，また，図や例が豊富なので非常に理解し易いテキストとなっている．

ベクトル解析入門
阿部龍蔵著／A5／128頁／本体1200円
物理学を学ぶために必要なベクトル解析を解説している．できるだけ途中の計算を省略せず理解しやすいよう配慮した．

複素関数の基礎
寺田文行著／A5／168頁／本体1600円
左頁に解説，右頁に図やポイント，小問を配置する見開き形式で，関数論の基礎から応用まで1つ1つステップアップできる懇切丁寧なテキスト．

理工系 複素関数論
多変数の微積分から複素解析へ
柴雅和著／A5／216頁／本体1600円
実解析の復習から複素関数論を平易に解説した大学初年級向け教科・参考書・問題を通して「考え方の獲得」と「計算の練習」ができる．

基礎課程 複素関数論
占部博信著／A5／200頁／本体1600円
多くの具体例を通して，をモットーに，複素関数論の理論と応用について簡潔にしかも丁寧に解説した理工系向の恰好の教科・参考書．

改訂 関数論
洲之内治男・猪股清二共著／A5／168頁／本体1340円
好評テキスト「関数論」の改訂版．旧版の特色を保持しつつ書き改めることにより，一層の明解さをはかった．豊富な例題・演習問題が理解を助ける．

複素関数論
柴岡泰光著／A5／240頁／本体1800円
豊富な図，精選された例，多くの章末問題により，広く一般の理工系の学生から数学科の学生にまで十分に対応できる教科・参考書．

改訂 関数解析入門
洲之内治男著／A5／184頁／本体1800円
前著のコンパクトさや，応用に役立つ関数解析の基礎事項の明確な理解と十分な実力を養えるような構成を保ちつつ，改訂した．

フーリエ解析・ラプラス変換
寺田文行著／A5／112頁／本体1200円
フーリエ解析とラプラス変換を具体例や問などを豊富に用いて，各項目を見開き形式で簡潔かつわかりやすく解説．

フーリエ解析とその応用
洲之内源一郎著／A5／124頁／本体1480円
フーリエ解析を数学的厳密さを失わず平易に論じ，その応用として偏微分方程式の境界値問題の解法を中心に具体例を選びながら解説したテキスト．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

数学関連好評書より(4)

工科系の数学

マイベルク・ファヘンアウア共著／A5／

1	数，ベクトル，関数	本体1700円
2	微分積分	本体1800円
3	線形代数	本体1800円
4	多変数の微積分	本体1800円
5	常微分方程式	本体2300円
6	関数論	本体2200円
7	フーリエ解析	本体1600円
8	偏微分方程式，変分法	本体1700円

ミュンヘン工科大学での基礎課程の講義をもとにつくられた，例，例題を多く含む教科書の翻訳．高見穎郎，薩摩順吉，及川正行訳．

数値解析入門［増訂版］

山本哲朗著／A5／288頁／本体2000円

好評を得てきた「数値解析入門」の増訂版．さらに幾つかの現代的数値計算法を取り上げ，解説も平易かつ厳密さを心がけた．

数値計算［新訂版］

洲之内治男著／石渡恵美子改訂

A5／176頁／本体1600円

前著を，初心者向きによく吟味された問題・例はそのままに，構成・体裁を現代風に改訂．

数値計算の基礎

数値解法を中心に

藤野清次著／A5／208頁／本体1700円

基本的な数値解法を中心に，考え方や方法が能率よく身につけられるよう解説．

新応用解析

洲之内治男・網屋正信共著／A5／176頁／本体1600円

理工系の学生のために，解析学全般での総合的な応用力を養えるように，各テーマの連続的なつながりを重視して書かれた教科書・参考書．

グラフ理論入門

Pearls in Graph Theory

ハーツフィールドほか著／鈴木晋一訳／A5／264頁／本体2500円

自然科学をはじめ，心理学や社会学にも応用され，コンピュータ科学にも必須の斯学をやさしく解説．

IT時代の

数学

ミニマムコア

戸川隼人著／四六／192頁／本体1350円

情報化社会における基礎的な数学力が得られるよう多くの例題を用いて易しく解説．2色刷．

理工系 確率統計

中村忠・山本英二共著／A5／184頁／本体1450円

理工系・情報系の学生を対象にした入門書．実際の現象をモデル化したり，解析できることを目標とし，例題や例を多く配置するなど工夫されている．

概説 確率統計

前園宜彦著／A5／160頁／本体1350円

例題を中心に構成され，わかりやすい解説でデータの処理など統計的センスを身に付けることができる初学者向教科・参考書．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

好評の数学演習書より(1)

演習と応用　線形代数
寺田文行・木村宣昭共著／A5／200頁／本体1700円
精選された豊富な例題と問題を通して，各項目の着実な理解と技術的な習得ができるよう工夫がこらされている．見開き構成，2色刷．

演習と応用　微分積分
寺田文行・坂田泩共著／A5／216頁／本体1700円
基本事項の解説に続き，洗練された例・問題とその詳しい解答により，大学で学ぶ微分積分をより深く理解できるよう構成されている．2色刷．

演習と応用　関数論
寺田文行・田中純一共著／A5／168頁／本体1600円
複素関数論の基礎概念を，精選された例題・問題と丁寧な解答を通して，全般にわたり着実に学習できる，学生必携の演習書．2色刷．

演習と応用　ベクトル解析
寺田文行・福田隆共著／A5／208頁／本体1700円
本書は講義中心になりがちな斯学において，より多くの練習問題をこなす学習の助けとなることを目的としている．2色刷．

演習と応用　微分方程式
寺田・坂田・曽布川共著／A5／224頁／本体1800円
問題解決法，例題・問題・くわしい解答という構成．見やすい見開き体裁，2色刷の使いやすく，わかりやすい演習書．

演習　行列・微積分
寺田文行・久保創共著／A5／224頁／本体1553円
本書は数学的素養を必要とする人々すべてを対象とし，各例題・問題が頁単位で構成され，初学者が容易に取り組めるように配慮されている．

演習　応用解析
洲之内治男・寺田文行・網屋正信・小島清史共著／A5／248頁／本体1553円
微分方程式・フーリエ解析・関数論等を比較的短い期間で修得しようとする人のための演習書．

FORTRANによる
演習　数値計算
洲之内・寺田・四条共著／A5／230頁／本体1553円
アルゴリズムの定式化，計算ステップの構成法，プログラム作成上の注意事項等に重点をおいた．

演習　確率統計
洲之内・寺田・舟根共著／A5／216頁／本体1553円
基本的かつ実用上重要な問題を精選し，それらの例題を通して①理論体系の流れの理解とともに，②基本的な計算力の養成を主眼としてまとめた．

基本演習確率統計
和田秀三著／A5／232頁／本体1700円
大学初年級・高専などの学生向けに，理系・文系を問わず重要性を増してきている統計学を自習できるよう，基本的な問題を精選・解説．2色刷．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

好評の数学演習書より(2)

詳解演習 線形代数
水田義弘著／A5／304頁／本体2100円
大学初年度で開講される線形代数の講義を受講しながら自らその理解を深めていくことを目的として作られた演習書.

基本演習 線形代数
寺田文行・木村宣昭共著／A5／256頁／本体1700円
基本的な問題を豊富に取り入れ，わかりやすくまとめた．大学初年級を対象とし，定期試験対策にも充分に役立つように配慮した．見やすい2色刷.

線形代数演習 [新訂版]
横井英夫・尼野一夫共著／A5／280頁／本体1980円
線形代数を具体的に理解するための演習書として好評を博した前著に体裁面での改訂を加え，さらなるわかりやすさを追求している．2色刷.

基本演習 微分積分
寺田文行・坂田泩共著／A5／192頁／本体1600円
大学初年級，高専等の学生を対象とし，基本的な問題を数多く取り入れ，わかり易く丁寧にまとめた．巻末の問題解答も充実している．2色刷.

解析演習
野本久夫・岸正倫共著／A5／304頁／本体1845円
本書は，解析学の基礎の適切な例題および，その解法をとりあげることにより，読者の解析学の実力をより確かなものとすることを目的としている.

詳解演習 微分積分
水田義弘著／A5／352頁／本体2200円
例題とその後にもうけた演習問題を通して大学で学ぶ微分積分がやさしく理解できる．基本的事項も詳しく説明．2色刷.

微分方程式演習 [新訂版]
加藤義夫・三宅正武共著／A5／約240頁／予価2000円
実際に微分方程式を使用する学生を対象とした演習書．前著とは構成を少し変え，難解と思われる箇所をわかりやすくし，応用問題を増やしてより親しみやすくなっている.

関数論演習
藤家龍雄・岸正倫共著／A5／275頁／本体1942円
複素関数論の基本事項に関する演習書．各節の冒頭には，その節で扱う問題に必要な定義と定理を整理し，丁寧な解説と注意を付した.

代数演習 [新訂版]
横井英夫・硲野敏博共著／A5／232頁／本体1950円
群・環・体とそれらの応用であるガロア理論の演習書として好評を博した前著を改訂．基礎的な問題や抽象的概念のイメージ化を助ける問題を新たに追加.

集合・位相演習
篠田寿一・米澤佳己著／A5／224頁／本体1800円
高校数学の知識で十分読める演習書．自習用として用いられることも考慮して，解答・証明が丁寧に記されている.

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

物理学関連好評書より

物理数学の基礎
香取眞理・中野徹共著／B5／160頁／本体1900円
理工系の学部1年生を対象として，物理学や理工系の専門科目を学ぶために必要な数学をわかりやすく解説した．２色刷．

量子力学［新訂版］
岡崎誠著／A5／240頁／本体1950円
長年好評を得てきた「量子力学」の新訂版．例題や図を多く配置し，初学者が短期間で使いこなし，応用できる力をつけられる教科・参考書．

熱力学の基礎
宮下精二著／A5／160頁／本体1600円
熱力学の標準的なテキスト．相転移現象などの興味深い対象を紙数を割いて詳述．磁性体の熱力学や輸送現象にも言及している．

統計力学
広池和夫著／A5／176頁／本体1748円
本書は，理工系の専門科目を学ぶ学生などを主な対象として，統計力学の理論体系をわかりやすく理解できるように書かれた入門テキスト．

連続体力学
流体および弾性体
松信八十男著／A5／240頁／本体2200円
冗長な一般論は避け，物理としてわかりやすい記述をこころがけて書かれた入門テキスト．

キッテル 統計物理
斎藤信彦・広岡一共訳／A5／216頁／本体2233円
熱力学をすでに学んだ読者のために，統計力学の魅力的な理論と手法を基礎から確率過程や輸送理論までにわたって論じた，含蓄ある名著．

臨時別冊・数理科学 2001 年 3 月号
高分子物理の基礎
統計物理的方法を中心に
川勝年洋著／B5／208頁／本体1886円
高分子の物理において基礎となることを，特に統計力学的な方法を中心に，詳しく解説した学部上級向け入門書．

応用超関数論I, II
今井功著／Ｉ巻：A5／224頁／本体2200円
II巻：A5／240頁／本体2200円
流体力学の権威である著者が，複素関数論の自然な延長として学べるよう工夫している得がたい書．

生きている地球
刻まれた45億年
R. W. オジャカンガス・D. G. ダービー共著／
堀福太郎訳／B6／376頁／本体1942円
読物として，大学初年級のテキストとして好適！

結晶は生きている
その成長と形の変化のしくみ
黒田登志雄著／B6／280頁／本体2427円
美しい宝石や雪の結晶はなぜあのような形をしているのだろうか？その構造と成長の謎を解説．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

物理学・化学演習書

基礎 物理学演習I, II
永田一清編／Ⅰ巻：A5／384頁／本体2400円
Ⅱ巻：A5／328頁／本体2400円
物理学の基礎的事項の総合的かつ速やかな理解に重点をおいた演習書．便宜をはかり頁単位で収録．

基礎演習 物理学
加藤正昭著／A5／256頁／本体1850円
精選された例題や問題を通して，初学者でも物理の重要な基礎概念や法則などの系統的な学習ができるよう工夫のこらされた内容構成になっている．２色刷．

演習 力学
今井功ほか共著／A5／176頁／本体1456円
力学に精通し，教育面にも関心をもつ著者陣が，初学者に斯学の本質をどうやって理解してもらうかという点に特に配慮をして編集・解説した．

演習熱力学・統計力学［新訂版］
広池和夫・田中実共著／A5／248頁／本体1850円
長い間好評を得てきた旧版を，現在の教育の事情を考慮し新訂．

新・演習 電磁気学
阿部龍蔵著／A5／208頁／本体1850円
基本事項をコンパクトにまとめ，洗練された例題・問題と詳しい解説で深い理解と真の応用力が涵養できるよう工夫されている．

演習 量子力学［新訂版］
岡崎誠・藤原毅夫共著／A5／256頁／本体1850円
本書は標準的演習書として長い間好評を得てきた「演習量子力学」の新訂版．要を得た明快な解説と精選された問題により自ずと量子力学の根本が会得できるようさらに工夫されている．

演習 基礎化学
渡辺啓著／A5／176頁／本体1700円
化学の基礎をコンパクトに解説し，標準的な例題を集め，詳しい解答を付した．さらに類題を用意し，理解をより深められるよう配慮した．

演習 有機化学［新訂版］
杉森彰著／A5／256頁／本体1980円
有機化学の基本的な考え方を身につけるための演習書．好評を博した前著を，さらに容易に理解することができるよう２色刷に改めた．

演習 物理化学
渡辺啓著／A5／248頁／本体1900円
自然科学・工学の多くの領域において，その基礎となる物理化学，その習得には適切な演習の場が必要であり，本書はまさにそれを提供している．

演習 分析化学
綿抜邦彦著／A5／96頁／本体1100円
本書は，初学者にも分析化学で用いるいろいろな計算ができるように初歩の計算から導入した．例題には詳しい解答をつけた．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

Information & Computing

コンピュータと社会
田中武二著　本体 1262 円

情報の処理と活用
浦　昭二・市川照久共編著　本体 1750 円

情報処理システム入門 [第 2 版]
浦　昭二他編　本体 1800 円

新コンピュータ概論
野崎昭弘著　本体 1650 円

情報処理
草薙信照著　本体 1900 円

文科系のための
コンピュータ　リテラシ [第 2 版]
Microsoft Office による
太田忠一編／植松・草薙共著　本体 2150 円

理工系ユーザのための
Windows リテラシ
皆本晃弥・森雅生共著　本体 2200 円

Windows 環境で使う
コンピュータ　リテラシ [第 2 版]
永井雅人著　本体 1550 円

Windows 環境で使う
コンピュータ入門
高島千鳥著　本体 1400 円

Windows 2000 環境で使う
情報リテラシ
東海林健二・永井明編　本体 2750 円

社会科学系のための
情報リテラシ [Windows 版]
竹田昌弘著　本体 1400 円

Windows 版
コンピュータ　リテラシ [基礎編]
植松康祐編著　本体 1200 円

Windows 版
コンピュータ　リテラシ [応用編]
植松康祐編著　本体 1200 円

実習　一太郎
柴田　博・室井勝子共著　本体 1450 円

実習 Excel
室井・鈴木・内田共著　本体 950 円

インターネット時代の書法と作法
筧捷彦監修／辰己丈夫著　本体 1600 円

コンピュータ解体新書
清水・菅田共著　本体 1500 円

CAD によるマイクロ・プロセッサの設計
村岡洋一監修・石井吉彦著　本体 2200 円

情報数理入門
大矢雅則編著　本体 1880 円

情報数理の基礎
梅垣壽春著　本体 2300 円

計算機科学入門
アービブ他著／甘利俊一他訳　本体 2524 円

コンピュータサイエンスのための
離散数学
守屋悦朗著　本体 2400 円

アルゴリズム入門
影井清一郎著　本体 1800 円

抽象データ型とアルゴリズム
アズムーデ著／野崎監訳・仙波訳　本体 4100 円

組合せアルゴリズム
仙波一郎著　本体 2136 円

オートマトン言語理論 計算論 I, II [第 2 版]
ホップクロフト他著／野崎昭弘他訳
I：本体 2800 円 II：予価 3000 円

ファジイ理論とその応用
水本雅晴著　本体 3200 円

コンパイラ I,　II
エイホ他著／原田賢一訳　本体各 5600 円

マイクロコンピュータのための
コンパイラ・コンパイラ
レッヒェンベルク他著／玉井　浩訳　本体 3800 円

Linux／FreeBSD／Solaris で学ぶ
UNIX
皆本晃弥著　本体 2300 円

ユーザのための UNIX
鬼頭繁治著　本体 2700 円

ツールとしての UNIX
深澤良彰編著　本体 2000 円

UNIX のススメ
清水・菅田共著　本体 2200 円

QuickBASIC 入門
林・室井・鈴木共著　本体 1400 円

実習 Visual Basic
林・室井・鈴木共著　本体 1850 円

Excel VBA による
Windows プログラミング
草薙信照・青山千彰共著　本体 2000 円

Fortran 77 プログラミング
原田賢一著　本体 1650 円

改訂 FORTRAN 77
大駒誠一著　本体 1700 円

Pascal プログラミング増訂版
古郡廷治著　本体 1700 円

Pascal 入門
古郡廷治著　本体 2300 円

明解 PASCAL　国際規格（ISO）準拠
伊東・金谷共著　本体 2311 円

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

Information & Computing

Pascal プログラミングの基礎
真野芳久著　本体 1900 円

入門 C プログラミング
徳田　昭著　本体 1437 円

C プログラミング作法
木下　恂著　本体 2816 円

新版 TURBO C プログラミング
玉井　浩著　本体 2200 円

C プログラマのための C ++
ポール著／玉井浩訳　本体 2800 円

C 言語のススメ
清水・菅田共著　本体 2300 円

文科系のための C
大駒誠一著　本体 1800 円

LEDA で始める
C/C++プログラミング
浅野・小保方共著　本体 2600 円

Java で学ぶ
はじめてのプログラミング
高橋友一・戸松豊和共著　本体 1400 円

これが LISP だ！
アンダーソン他著／玉井浩訳　本体 3204 円

構造化 COBOL
第 2 種情報処理技術者をめざす
石井・小島共著　本体 1500 円

COBOL の基礎と応用
JIS 1992 年版準拠
大駒誠一著　本体 1450 円

リレーショナルデータベース入門［新訂版］
増永良文著　本体 2600 円

オブジェクト指向データベース
ヒューズ著／植村監訳／石丸訳　本体 2800 円

データベースシステムの実際
「桐」全機能解説
酒井俊夫著　本体 3204 円

UNIX ワークステーションと LAN の実際
鬼頭繁治著　本体 3200 円

GIMP/GNUPLOT/Tgif で学ぶ
グラフィック処理
皆本晃弥・坂上貴之共著　本体 2200 円

パソコンによる**スカイウォッチング**
作花一志著　本体 2000 円

曲面の CG 入門　数理とプログラミング
岸正倫著　本体 2200 円

C による CG レイトレーシング
千葉・村岡共著　本体 2800 円

花の CG
戸川隼人著　本体 1709 円

絵本の CG
村岡一信著　本体 2200 円

フラクタル CG コレクション
渕上季代絵著　本体 1505 円

C によるフラクタル CG
渕上季代絵著　本体 1600 円

カオス CG コレクション
川上　博著　本体 2200 円

C によるカオス CG
川上・上田共著　本体 2600 円

応用カオス
合原一幸編著　本体 3800 円

カオス
合原一幸編著　本体 3500 円

ニューラルネットと脳理論
アービブ『脳』第 2 版
アービブ著／金子隆芳訳　本体 4600 円

ニューラルネットの新展開
甘利俊一編著　本体 2400 円

REDUCE 入門
広田・伊藤共著　本体 2233 円

MATLAB と利用の実際［第 2 版］
小国　力著　本体 2600 円

Maple V と利用の実際
小国　力著　本体 2500 円

Mathematica の基礎と応用
小国　力著　本体 2200 円

BASIC 数値計算プログラム集
戸川隼人著　本体 1165 円

数値計算とその応用　FORTRAN 77
アトキンソン他著／神谷紀生他訳　本体 3200 円

線形代数と線形計算法序説
村田健郎著　本体 2200 円

有限要素法を使った
CAD（Computer Aided Design）
サボナディエル他著／神谷紀生訳　本体 2000 円

コンピュータによる
偏微分方程式の解法［新訂版］
スミス著／藤川洋一郎訳　本体 2233 円

Fortran95, C&Java による
新数値計算法
小国　力著　本体 2200 円

ダイナミックシステムの
統計的解析と制御［新訂版］
赤池弘次・中川東一郎共著　本体 2300 円

コンピュータチェス
D. リービ他著／小谷善行監訳　本体 2900 円

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

脳と心をさぐる

ニューラルネットと脳理論
アービブ『脳』第2版
M. A.アービブ著／金子隆芳訳／
A5／520頁／本体4600円
脳のメカニズムを探る．知能をもつ機能をつくる．この二つをモチーフにした定評ある『脳』の改訂版．

Q＆Aでわかる脳と視覚
人間からロボットまで
乾敏郎著／A5／232頁／本体2233円
脳と視覚の最前線の研究を題材に，Q&A形式でいま何がわかっているかなどを解説してゆく．

ギブソン 生態学的視覚論
古崎敬他訳／A5／392頁／本体4175円
「アフォーダンス」により，改めて脚光を浴びるギブソンの名著．環境の中の知覚を詳細に解説．

最新 運動と脳
—体を動かす脳のメカニズム—
松波謙一・内藤栄一共著／
A5／264頁／口絵4頁／本体2400円
科学における最後の秘境といわれる脳と運動の関係を気鋭の著者がわかりやすく解説する．

人間の言語情報処理
言語理解の認知科学
阿部純一・桃内佳雄・金子康朗・李光五共著／
A5／360頁／本体3600円
人間の言語理解のしくみの研究の最前線を紹介．

意識と脳
—心の電源としての意識—
山本健一著／A5／240頁／本体2200円
長年，臨床と研究の両面から意識の謎を追究してきた著者がその成果をまとめた意欲作．

感性の科学
感性情報処理へのアプローチ
辻三郎編／A5／224頁／本体2400円
情報科学と心理学の両面から取り組まれた学際的研究プロジェクトの成果を基に，人間の感性への科学的アプローチを紹介・解説する．

カオス的脳観
脳の新しいモデルをめざして
津田一郎著／B6／232頁／本体1750円
著者がカオス研究を通じて得た世界観に基づく脳の理論的研究と，複雑系の研究方法などを紹介．

ニューロサイエンス入門
松村道一著／A5／344頁／本体2700円
読者の予備知識を極力仮定せずに分かりやすく説きおこした最新の解説書．脳と心への多種多様なアプローチを一目で見渡せる．

映像の心理学
マルチメディアの基礎
中島義明著／B6／280頁／本体2400円
人間が情報として映像をどのように摂取しているのかをトピックスを中心として実証的データにもとづいて解説．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

既刊の好評書より

Mathematicaと MATLABの基礎
小国力著／A5／112頁／本体1300円

LATEXの基礎
小国力著／A5／104頁／本体1200円

Maple Vと利用の実際
—数式処理とCG—
小国力著／B5／216頁／本体2500円
MATLABと利用の実際」の姉妹編となる数式処理システムMaple V4の解説書．カラー口絵付．

Mathematicaの基礎と応用
分かりやすいプログラミング
小国力著／A5／240頁／本体2200円／カラー口絵4頁
Mathematicaの基本的な機能を使えることを目的とした平易な解説書．

ダイナミックシステムの統計的解析と制御［新訂版］
赤池弘次・中川東一郎共著／A5／208頁／本体2300円
不規則変動を示すシステムの計算機制御を実現するための統計的方法を具体例にそくして解説．

UNIXユーザのための
トラブル解決 Q&A
皆本晃弥著／B5／176頁／本体1800円

シェル&Perl入門
bash/tcsh/grep/sed/awk/Perl
皆本晃弥・奥村浩共著／B5／280頁／本体2950円

カオス
カオス理論の基礎と応用
合原一幸編著／A5／360頁／本体3500円
カオスの重要性への認識が広まるとともに，その“乱用”も多く見られるようになった．カオスとは一体何なのか．本書がその研究の現状を紹介する．

CによるCGレイトレーシング
［カラー口絵］
千葉則茂・村岡一信共著／A5／328頁／本体2800円
３次元CGの手法を明解に解説した好著．下記のHPより，掲載されたプログラムをダウンロードできる．
http://www-cg.cis.iwate-u.ac.jp/lab/download/index.html

左記「CによるCGレイトレーシング」をベースに，デジタル化効果を活用したレイトレーシングのデジタル教科書
デジタルメディアテクストブック「３次元CGシリーズ」—レイトレーシング法の実際—（開発：(株)ジェーエフピー）
も別売しております．サイエンス社営業部にご注文いただけますと割引価格9,640円（税・送料込）でご購入いただけます．（料金後払い）

新装版 UNIXワークステーションによる
科学技術計算 ハンドブック
［基礎篇C言語版］
戸川隼人著／A5／568頁／本体3800円
アルゴリズム全部にCによるプログラムを付す．

Computing辞典
オックスフォード大学出版局刊
野崎昭弘・中川圭介・玉井浩共訳／A5／528頁／本体5800円
コンピューティングと，数学，論理，電子工学等の関連分野の4500以上の用語を収録，解説．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

心理学関連好評書

コンパクト新心理学ライブラリ

〈監修〉 梅本堯夫・大山　正

近年，心理学に対する関心がますます高まっている一方で，大学教育をめぐる状況は大きく変貌を遂げており，授業内容はよりわかりやすくやさしく，親しみやすいものが求められています．本ライブラリは，このような時代の要請に応え，心理学の各領域のエッセンスをコンパクトにまとめ，伝えることを目的として編まれました．視覚的な理解にも配慮し，各巻2色刷・左右見開き形式による体裁としました．

5 性格の心理 ビッグファイブと臨床からみたパーソナリティ

丹野義彦著
四六／264頁／本体1800円

本書は，性格心理学をはじめて学ぶ大学生・短大生のためのテキストです．従来の性格心理学の理論をビッグファイブの枠組みにより再編成しました．また，生物学・異常心理学・臨床心理学的な観点を重視し，性格の発達・測定・適応・変容についても詳しく解説しました．

主要目次　性格の記述　性格の発達　性格の測定　性格の適応　性格の変容

8 乳幼児の心理 コミュニケーションと自我の発達

麻生　武著
四六／216頁／本体1500円

他の動物に比べ，未熟な状態で生まれるヒトの子どもはどのように成長していくのでしょうか．彼らは遊びや養育者との関わりをとおして，象徴能力やコミュニケーション能力を身につけ，私たち大人と同じように世界を分かち合える存在になっていきます．その過程を中心に，就学前の子どもたちについて著者自身が長年行ってきた縦断的な観察データをもとに生き生きと解説します．

主要目次　人として生まれる　ことばとしての身体　「いま・ここ」の世界を越え始める　自己と他者　広がる想像の世界

1 心　理　学 心のはたらきを知る

梅本堯夫・大山　正・岡本浩一共著
四六／192頁／本体1350円

2 学習の心理 行動のメカニズムを探る

実森正子・中島定彦共著
四六／224頁／本体1500円

7 教育心理学 「生きる力」を身につけるために

多鹿秀継著
四六／184頁／本体1500円

10 青年の心理 ゆれ動く時代を生きる

遠藤由美著
四六／176頁／本体1500円

ライブラリ パーソナリティ 3

ユーモアの心理学 人間関係とパーソナリティ

上野行良著
四六／208頁／本体1300円

なぜ人は誰かが冗談を言うと「おもしろい」と感じるのでしょうか？　関東と関西でユーモアの好みに違いはあるのでしょうか？　ユーモアが差別を助長したり，あるいはストレスを緩和したりすることはあるのでしょうか？　本書ではこのようなユーモアに対する人間の心の動きを分析し，分かりやすく紹介します．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社